

SEMEJANZA FLUIDODINAMICA Y TERMICA

Prof. Raúl Fco. Romero Day

Resumen:

Se desarrolla el método de adimensionalización de ecuaciones, para los problemas de semejanza y modelos de sistemas termodinámicos fluidos de composición constante. Se deriva como ejemplos de aplicaciones particulares las funciones:

- Del coeficiente de fricción en tuberías.
- Del número de Nusselt en convención forzada.

Se da una referencia bibliográfica sobre el tema.

A distintos procesos que se encuentran regidos por idénticas ecuaciones diferenciales adimensionales, con condiciones límites y de contorno semejantes, le corresponden iguales ecuaciones integrales adimensionales, que resuelven los valores requeridos. Determinados los factores de escala, pueden conocerse los valores dimensionales, de cada proceso en particular.

El método de adimensionalización de ecuaciones es el más racional y seguro para:

- Establecer los criterios de semejanza.
- Encontrar los parámetros adimensionales en función de los cuales se puede universalizar las experiencias con modelos.
- Reconocer los límites de validez, aplicación y el error en que se puede incurrir por falta de semejanza completa.

Los métodos de Rayleigh y Buckingham, permiten resolver estos problemas con menor información: basta con conocer todas las variables independientes que intervienen en el proceso; pero tienen limitaciones, entre las cuales no aseguran llegar a los parámetros adimensionales convenientes, obteniéndose según como se encaja la solución, productos de los buscados, que no tienen mayor utilidad y significación física directa.

Para un fluido newtoniano, puro o de composición constante, sin transmisión de calor por radiación, en ausencia de otros campos de fuerzas, salvo el gravitatorio y sin difusión por presión y/o térmica, las ecuaciones diferenciales que rigen el sistema son:

$$\text{Ecuación de continuidad: } \frac{\partial \rho}{\partial t} = -\nabla \cdot (\rho \vec{v})$$

$$\text{Ecuación de movimiento: } \rho \frac{d\vec{v}}{dt} = -\nabla p + \rho \vec{g} + \mu \left[\Delta \vec{v} + \frac{1}{3} \nabla (\nabla \cdot \vec{v}) \right]$$

$$\text{Ecuación de energía: } \rho c_p \frac{dT}{dt} = -\nabla \cdot \vec{q} + \left(\frac{\partial h}{\partial T} \right) \cdot \frac{dp}{dt} + \mu \phi_D$$

Función disipación (sumatoria de productos de dos gradientes de velocidades, o sea con dimensiones:

$$v^2/L^2): \phi_D$$

$$\text{Ley de Fourier: } \vec{q} = -k \nabla T$$

Aceptaremos la constancia de : α ; c_p y μ .-

Definimos las siguientes variables adimensionales (con asteriscos):

Coordenadas adimensionales: $x^* = x/L_0$ $y^* = y/L_0$ $z^* = z/L_0$

Tiempo adimensional: $t^* = t \cdot V_0/L_0$

Volumen adimensional: $\pi^* = \pi / L_0^3$

Velocidad adimensional: $v^* = (v/V_0)$

Presión adimensional: $P^* = (P - P_0) / (\rho_0 V_0^2)$

Temperatura adimensional: $T^* = (T - T_0) / T_0$

Densidad adimensional: $\rho^* = \rho/\rho_0$

Operador nabla adimensional: $\nabla^* = L_0 \nabla$

Laplaciana adimensional: $\Delta^* = L_0^2 \Delta$

Si sustituimos en las ecuaciones diferenciales, en función de las variables adimensionales y reordenamos resultan las ecuaciones adimensionales de continuidad, movimiento y energía:

$$\frac{\partial \rho^*}{\partial t^*} = -\nabla^* \cdot (\rho^* \vec{v}^*)$$

$$\frac{d\vec{v}^*}{dt^*} = -\frac{\nabla^* P^*}{\rho^*} + \frac{1}{[Fr]} \vec{g}^* + \frac{1}{[Re]} \left[\Delta^* \vec{v}^* + \frac{1}{3} \nabla^* (\nabla^* \cdot \vec{v}^*) \right]$$

$$\frac{dT^*}{dt^*} = \frac{\Delta^* T^*}{\rho^* [Pr]} + \frac{[Eck]}{\rho^*} \left(\frac{\partial \ln \pi_e^*}{\partial \ln T^*} \right) \frac{dP^*}{dt^*} + \frac{[Br]}{[Pr]} \phi_D^*$$

Las magnitudes: ρ_0 , V_0 , T_0 , P_0 y L_0 son valores para puntos homólogos (de iguales coordenadas adimensionales) en tiempos homólogos (igual tiempo adimensional), propios de cada uno de los sistemas que forman el conjunto, o valores característicos de los mismos.

Para poder resolver las anteriores ecuaciones, se requiere eliminar una de las variables, lo que es factible utilizando la ecuación de estado. Eliminaremos ρ^*

Teniendo en cuenta que la densidad se puede expresar en función de la presión y de la entropía específica y que desarrollando en series de Taylor.

$$\rho = \rho_0 + \left(\frac{\partial \rho}{\partial P} \right)_S \Delta P + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \rho}{\partial P^2} \right)_S \Delta P^2 + \frac{1}{6} \left(\frac{\partial^3 \rho}{\partial P^3} \right)_S \Delta P^3 + \dots + \left(\frac{\partial \rho}{\partial S} \right)_P \Delta S + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \rho}{\partial S^2} \right)_P \Delta S^2 + \dots$$

Aceptando a presión constante:

$$\rho = \rho_0 [1 - \beta (T - T_0)]$$

y a temperatura constante:

$$\rho = \rho_0 [1 + \lambda (P - P_0)]$$

Siendo:

$$C_0^2 = \left(\frac{\partial P}{\partial \rho} \right)_S$$

y

$$ds = C_p \frac{dT}{T} - \frac{\pi_e}{T} dP$$

Adimensionalizando y resolviendo resulta para gas ideal:

$$p^* = 1 + [M]^2 p^* + \frac{1}{2} \frac{(1-\delta)}{\delta} [M]^4 p^{*2} + \frac{1}{6} \frac{(1-\delta)(1-2\delta)}{\delta^2} [M]^6 p^{*3} + \dots + [T_0 \beta] \left\{ \ln(T^*-1) + \frac{(1-\delta)}{\delta} \ln(\delta [M]^2 p^* + 1) \right\}$$

Y para líquidos de módulo de compresibilidad constante:

$$p^* = 1 + [M]^2 p^* + \frac{1}{2} [M]^4 p^{*2} + \frac{1}{6} p^{*3} [M]^6 + \dots + [T_0 \beta] \ln(T^*-1) + \left[\frac{\beta V_0^2}{\rho_0} \right] \ln(1 + [\lambda V_0^2 \rho_0] p^*)$$

Por lo tanto la densidad adimensional resulta ser:

Para procesos isoentópicos o isotérmicos función solo: de la presión adimensional p el número de Mach (M) y de otros parámetros adimensionales que pueden diferir en distintos estados y sustancias y que aparecen recién en las segundas derivadas.

Cuando el Número de Mach es menor que 1 y pequeño, y más aún si p^* es menor que 1, se puede aceptar para todas las sustancias y estados fluidos:

$$p^* = 1 + [M]^2 p^*$$

El término térmico: $(T_0 \beta) \ln(T^* - 1)$ resulta despreciable, salvo en los casos en que la convención natural es significativa respecto a la forzada. En este caso un análisis especial, que no desarrollaremos aquí, conduce al número Grashoff

$$(Gr) = \beta (\pi - T_0) g \beta^2 L_0^3 / \mu^2$$

Cuyo significado físico es la relación de las fuerzas de flotabilidad a las de inercia, multiplicadas por el cuadrado de Reynolds. El (Gr) como se ve incluye a $(T_0 \beta)$.

Los parámetros adimensionales que aparecen en las anteriores ecuaciones abreviadamente por un símbolo son:

Número de Mach $(M) = V_0 / C_0 = (\rho_0 V_0^2 / K)^{1/2}$

Es la relación entre las fuerzas de inercia de referencia $(\rho_0 V_0^2 L_0^2)$ y las fuerzas de compresibilidad por unidad de deformación volumétrica:

$$K L_0^2 = \frac{\partial p}{\partial \rho} L_0^2 \rho_0$$

Para un fluido incompresible vale 0, y siempre que su valor sea suficientemente chico y menor que 1, puede despreciarse.

Número de Froude: $(Fr) = V_0^2 / (g L_0)$

Es la relación de las fuerzas de inercia características a las gravitatorias $(g \rho_0 L_0^3)$. En el movimiento de fluidos incompresibles con contornos fijos, al poder definirse una presión dinámica, como igual a la total menos la estática (en ausencia de movimiento), las fuerzas gravitatorias no influyen el movimiento y Froude desaparece. Cuando tiene un valor elevado las fuerzas gravitatorias se vuelven despreciables respecto a las de inercia y (Fr) puede no ser tenido en cuenta.

Número de Reynold: $(Re) = V_0 \cdot L_0 / \nu = V_0 \cdot L_0 / \mu$

Es la relación entre las fuerzas de inercia características a las de viscosidad $(\mu V_0 L_0)$. La estabilidad del régimen laminar está supeditada a no pasar valores críticos de Reynolds, por encima de los cuales la preminencia de las fuerzas de inercia originan la turbulencia.

Número de Peclet: $(Pe) = (Re) \cdot (Pr) = \rho_0 C_p V_0 L_0 / k = V_0 L_0 / \alpha$

Es la relación entre la energía calórica transportada por convección, a la transportada por conducción. Generalmente se lo expresa como el producto de Reynolds por el número de Prandtl.

Número de Prandtl: $(Pr) = \frac{\nu}{\alpha} = \mu C_p / k_0$

Es un número adimensional característico de cada sustancia y función de presión y temperatura. Dentro de las suposiciones del presente análisis es constante para una sustancia dada.

Número de Eckert: $(Eck) = V_0^2 / (C_p T_0)$

Es la relación entre la energía cinética y la energía calórica por unidad de volumen. Para gases ideales $C_{p0} = R T_0 / PM$ y por lo tanto resulta $(Eck) = (\gamma - 1) (M)^2$. En la práctica en los casos en que puede despreciarse Mach, puede no tenerse en cuenta el número de Eckert.

Número de Brinkman: $(Br) = (Pr) \cdot (Eck) = \nu V_0^2 / (\alpha C_p T_0) = (\mu V_0^2 / (k_0 T_0))$

Es la relación entre la energía perdida por disipación viscosa ($\mu V_0 L_0$) y la transmitida por conducción del calor ($k_0 T_0 L_0$). Se verifica que este número puede resultar del producto de Prandtl por Eckert.

En resumen el sistema de ecuaciones diferenciales adimensionales obtenido, teniendo en cuenta tomar un juego de parámetros adimensionales independientes, dependerá de:

$(Re), (Fr), (M), (Pr), (Br), (\beta T_0)$.

Para las mismas condiciones límites y de contorno adimensionales (lo último implica semejanza geométrica) se obtendrán las siguientes ecuaciones integrales adimensionales válida para todos estos sistemas, con la suposición de constancia de $\nu; \alpha; C_p$ y de validez de la ecuación de estado adimensionalizada:

$$\rho^* = 1 + [M]^2 P^* + [\beta T_0] \ln(T^* - 1)$$

$$P^* = f_1(Re; Fr; M; Pr; Br; [\beta T_0]; x^*; y^*; z^*; t^*)$$

$$\vec{v}^* = f_2(Re; Fr; M; Pr; Br; [\beta T_0]; x^*; y^*; z^*; t^*)$$

$$T^* = f_3(Re; Fr; M; Pr; Br; [\beta T_0]; x^*; y^*; z^*; t^*)$$

En régimen estacionario desaparece t^* y en sistemas uni y bidimensionales dos o una coordenada adimensional.

Semejanza Fluido dinámica

Para procesos isoentrópicos, isotérmicos, o en general cuando los efectos térmicos se pueden despreciar:

$$\rho^* \text{ ó } \vec{v}^* = f(Re; M; Fr; x^*; y^*; z^*; t^*)$$

En los procesos en que deba considerarse la tensión superficial (que en nuestro anterior análisis no hemos tenido en cuenta), influye también otro parámetro adimensional, el número de Weber $(We) = \rho_0 V_0 L_0 / \sigma$. Relación de las fuerzas de inercia a las de tensión superficial. Este sólo influye cuando hay superficies libres y su valor es suficientemente chico (líquidos pulverizados, Lo muy chico, etc).

Todas las otras magnitudes adimensionales de interés: aceleraciones, gradientes de velocidad, caudales, fuerzas, potencias, etc., se pueden derivar a partir de ρ^*, \vec{v}^* y el método de adimensionalización.

Las condiciones para que exista semejanza fluidodinámica para sistemas con semejanza geométrica, estarán dadas por la igualdad de los números de $(Re), (M), (Fr)$ y (We) , pero afortunadamente rara vez deben considerarse más de dos y generalmente basta con el de Reynolds.

La relación entre las fuerzas actuantes en un proceso fluidodinámico, a las fuerzas de inercia características, se lo denomina número de Euler $(Eu) = F / (\rho_0 V_0^2 L_0) = \Delta P / \rho_0 V_0^2$.

La segunda forma, muy común de expresar este número, resulta cuando las fuerzas actuantes derivan o están relacionadas a una caída de presión. La presión adimensionalizada puede considerarse como un número de

Euler local (de cada punto). Los coeficientes de fricción de conducciones, los de arrastre de cuerpos sumergidos y de desagües, pueden asimilarse o relacionarse con números de Euler, y en general para una misma forma geométrica serán función de (Re), (M), (Fr) y (We).

Por ejemplo el coeficiente de fricción en tuberías cilíndricas puede definirse:

$$f = (2\Delta P / \rho_0 v_0^2) (D/4L)$$

Para un fluido incompresible, en régimen estacionario y para este caso:

$$\bar{v}^* = f(Re; r^*; x^*) \quad \text{y} \quad \tau_{rx} = -\mu \frac{\partial v_x}{\partial r}$$

Aceptaremos tuberías lisa ya que sino habría que considerar la rugosidad relativa, que excede los límites de espacio del presente trabajo.

Las fuerzas de fricción en la pared deben ser equilibradas por la pérdida de presión:

$$\Delta P_0 \cdot \frac{\pi D^2}{4} = \int_0^L \mu \left(\frac{\partial v_x}{\partial r} \right)_0 \pi D dx$$

Dividiendo ambos términos de la igualdad por: $\rho_0 v_0^2 \cdot L/2$ y adimensionalizando el segundo término tomando D como longitud características resulta:

$$\frac{2\Delta P}{\rho_0 v_0^2} \cdot \frac{D}{4L} = \frac{\mu}{\rho_0 v_0 D} \cdot \frac{D}{L} \int_0^{L/D} \left(\frac{\partial v_x^*}{\partial r^*} \right)_0 dx^* = f(Re; \frac{L}{D}) = f$$

Si se desprecia el efecto de entrada o sea se acepta un perfil de velocidades constante es:

$$\left(\frac{\partial v_x^*}{\partial r^*} \right)_0 \quad \text{constante,}$$

(L/D) desaparece y

$$f = f(Re)$$

Semejanza de transporte de calor en fluidos

En la generalidad de estos casos y para convección forzada, basta con considerar los números de Reynolds y de Prandtl, no interviniendo los restantes o siendo su efecto despreciable.

Se define como coeficiente de transferencia de calor:

$$h = Q / (A \cdot \Delta T)$$

Siendo ΔT , una diferencia de temperaturas o una medida aritmética o logarítmica de temperaturas; por lo tanto la forma como se toma ΔT define a h.

La transferencia de calor en un fluido viene expresada por:

$$Q = h \cdot T \cdot A = \int_A k \left(\frac{\partial T}{\partial n} \right)_0 \cdot dA$$

Tomando ΔT , como temperatura de referencia adimensionalizando y reordenando:

$$\text{Número de Nusselt; } (Nu) = h L_0 / k = \quad dA^* = f(Re, Pr, t^*)$$

Si se acepta que el gradiente de temperaturas, sea función solo de Reynolds y Prandtl de las coordenadas y del tiempo adimensionalizado. Para régimen estacionario, naturalmente t^* desaparece y el Número de Nusselt queda función exclusiva de (Re) y (Pr).

Notación

ρ	: densidad
P	: presión
C_p	: calor específico a presión constante
π_e	: volumen específico
α	: coeficiente de difusión térmica
S	: entropía específica
C_v	: calor específico a volumen constante
F	: fuerza
n	: normal
t	: tiempo
g	: aceleración de la gravedad
T	: temperatura absoluta
k	: coeficiente de conducción
g_u	: versor gravedad
β	: coeficiente de dilatación a presión constante
D	: diámetro
A	: área
r	: radio o coordenada radial
τ	: esfuerzo de corte
f	: coeficiente de fricción
v	: velocidad
μ	: viscosidad
q	: densidad de flujo de calor
ν	: viscosidad cinemática
L	: longitud
	: C_p/C_v
K	: módulo de compresibilidad
σ	: tensión superficial
C_o	: velocidad del sonido
PM	: peso molecular
R	: constante de los gases.

BIBLIOGRAFIA

BIRD, STEWART, LIGHTFOOT	Ed. Reverté. Fenómenos de Transporte.
PERRY	Manual del Ingeniero Químico: Análisis Dimensional.
HUTTE	Manual del Ingeniero. Tomo I: Mecánica de Semejanza.
DUBBEL	Manual del Constructor de Máquinas. Tomo I: Teoría de semejanza.
FOUST – WENZEL	Ed. Cecsca. Operaciones Unitarias: Análisis Dimensional y Teoría de los Modelos. Parte II: Transporte Molecular Turbulento.
STREETER	Fundamentos de Mecánica de los Fluidos: Semejanza Dinámica.
VENNARD	Elementos de Mecánica de los Fluidos: Similitud y Análisis Dimensional.
MC ADAMS	Transmisión del Calor: Análisis Dimensional.