



UNIVERSIDAD NACIONAL DE CUYO
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales

Seminario de investigación para optar al título de Licenciada en Ciencias Básicas con
orientación en Matemática

TEOREMA DE RADÓ PARA EL P-LAPLACIANO NO-HOMOGÉNEO

M. Laura de Borbón

Director: Dr. Pablo D. Ochoa
Codirector: Dr. Juan M. Alonso

Marzo de 2018

*Dedicado a
mi familia y amigos*

Agradecimientos

Agradezco especialmente a Pablo Ochoa, director de este trabajo, por su inmensa dedicación, por guiarme, enseñarme y acompañarme. Quiero agradecer también a mi familia y amigos por estar conmigo y apoyarme durante todo el trayecto.

¡Muchas gracias a todos!

Índice general

| | |
|--|-----------|
| 1. Introducción | 1 |
| 2. Definiciones y preliminares | 3 |
| 2.1. Operador p-Laplaciano: definición y aplicaciones | 3 |
| 2.2. Preliminares en espacios normados | 4 |
| 2.3. Espacios L^p | 6 |
| 2.4. Convexidad y semi-convexidad | 8 |
| 2.4.1. Convoluciones infimales | 9 |
| 2.5. Espacios de Sobolev | 11 |
| 2.5.1. Trazas para funciones Sobolev | 13 |
| 2.6. Soluciones débiles, viscosas y viscosas Feeble | 14 |
| 2.6.1. Soluciones débiles | 14 |
| 2.6.2. Soluciones viscosas | 15 |
| 3. Equivalencia entre soluciones débiles y viscosas Feeble | 19 |
| 3.1. Prueba del Teorema 3.1 | 20 |
| 3.1.1. Estimación de Caccioppoli | 26 |
| 3.2. Prueba del Teorema 3.2 | 37 |
| 4. Resultado de tipo Radó para el p-Laplaciano no-homogéneo | 39 |
| 4.1. Exclusión de los puntos críticos | 41 |
| 4.2. Lema de Martio para el caso no-homogéneo | 42 |
| 4.3. Prueba del Teorema 4.1 | 47 |

Capítulo 1

Introducción

En el año 1924, T. Radó [17] demostró la llamada propiedad de Radó para funciones analíticas, la cual establece que si una función compleja continua $f(z)$ es analítica en aquellos puntos donde $f(z) \neq 0$, entonces es analítica en todo su dominio de definición. Así, cada conjunto de nivel puede ser removido para estudiar la analiticidad de una determinada función.

Posteriormente, J. Král [14] obtuvo la misma propiedad para funciones armónicas, las cuales son de suma importancia en la teoría clásica de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales. Con mayor exactitud, Král probó que si una función es armónica fuera de un conjunto de nivel, entonces es armónica en todo el dominio de definición. Luego, se buscó extender la propiedad de Radó a ecuaciones diferenciales más generales. De especial interés es la ecuación dada por el p -Laplaciano, que es un operador que generaliza al operador de Laplace (este último se obtiene en el caso particular en que el parámetro p es igual a 2). En primer lugar, fue Kilpeläinen en [13] quien demostró la propiedad de Radó para funciones p -armónicas (es decir, soluciones de la ecuación homogénea del p -Laplaciano) en el plano, y luego, Juutinen y Lindqvist en [10] extendieron el resultado de Král y Kilpeläinen para dimensiones arbitrarias. Finalmente, se han elaborado ampliaciones de los resultados mencionados para ecuaciones de segundo orden más generales en las referencias [11], [15] y [18]. Sin embargo, continúa siendo un problema abierto la propiedad de Radó para el operador p -Laplaciano singular (es decir, para p entre 1 y 2) en el caso en que la ecuación tiene un término no-homogéneo dependiente de la variable x , la función u y su gradiente ∇u .

En el presente trabajo, estamos interesados en probar que si una función u es solución de una ecuación diferencial de tipo p -Laplaciano no-homogénea fuera del conjunto de nivel $u = 0$, entonces la función es solución de la ecuación en todo su dominio de definición.

Para la ecuación que estudiaremos, se han formulado diferentes nociones de soluciones. El problema en el que estamos interesados, presenta conflictos en los puntos críticos y, para evitarlos, los trataremos a partir de una equivalencia dada entre dos tipos de soluciones: *soluciones viscosas* y *soluciones débiles de Sobolev*. Para el p -Laplaciano homogéneo, esta equivalencia ya ha sido estudiada por Juutinen, Lindqvist y Manfredi en [12], a través de la noción de funciones p -armónicas, p -subarmónicas y p -superarmónicas.

En [12], los autores muestran que la noción de solución p -armónica es equivalente a la noción de solución viscosa. Para el caso de la ecuación no-homogénea, en [9], Julin y Juu-

tienen prueban que las soluciones viscosas del p-Laplaciano no-homogéneo son soluciones débiles en el caso donde el lado derecho de la ecuación es una función continua y depende solo de la variable espacial. Finalmente, en [16], Medina y Ochoa prueban una equivalencia entre soluciones débiles y soluciones viscosas para el p-Laplaciano no-homogéneo en el caso en que el lado derecho de la ecuación es una función $f = f(x, u, \nabla u)$ definida en $\Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, siendo $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ el dominio de definición de la solución.

Para tratar el problema del caso homogéneo, en [10], Juutinen y Lindqvist exponen una definición de solución viscosa que evita los puntos críticos. Esto permite probar que si tenemos una solución de la ecuación homogénea en un sentido débil en los puntos del dominio donde no se anula el gradiente, entonces será solución en el mismo sentido en todo el dominio de definición.

En este trabajo, aplicaremos la misma idea usando la misma noción de solución viscosa que proponen Juutinen y Lindqvist en [10] y probaremos que esta definición es equivalente a la noción de solución débil. Para probar esta equivalencia, nos basaremos en el trabajo de Medina y Ochoa en [16]. Sin embargo, allí, los autores emplean una noción de solución viscosa diferente a la que manejan Juutinen y Lindqvist. Es por esto que hemos hecho una adaptación de la equivalencia dada en [16] para la definición de solución viscosa empleada en [10].

El trabajo está organizado de la siguiente manera:

En el segundo capítulo, daremos las definiciones principales que usaremos a lo largo del resto del trabajo.

En el capítulo 3, estudiaremos algunos resultados preliminares; entre ellos, los teoremas que plantean la equivalencia entre soluciones débiles y viscosas. Para su demostración, daremos algunos lemas previos que serán de suma importancia.

Finalmente, en el capítulo 4, enunciaremos y probaremos los resultados de interés, dando primero una proposición que permite descartar los puntos críticos. Posteriormente, probaremos el resultado principal aplicando dos lemas previos que serán demostrados en ese mismo capítulo.

Capítulo 2

Definiciones y preliminares

En este capítulo damos las principales definiciones y los resultados preliminares que serán empleados a lo largo del presente trabajo. No exponemos las demostraciones, sin embargo, pueden encontrarse en la referencia [2].

2.1. Operador p-Laplaciano: definición y aplicaciones

Como mencionamos en la Introducción, el objetivo de este trabajo es resolver el problema de tipo Radó para el caso del p-Laplaciano no-homogéneo, extendiendo así, el teorema de Král a la siguiente ecuación elíptica degenerada (o singular)

$$-\operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u) = f(x, u, \nabla u) \quad (2.1)$$

definida en un conjunto abierto y acotado $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, para $1 < p < \infty$ y donde f es una función definida en $\Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$. Cuando $p > 2$, en los puntos donde $\nabla u = 0$, la ecuación se denominada *degenerada*. Por otro lado, para $p < 2$, cuando $\nabla u = 0$, $|\nabla u|^{p-2}$ no está definido y la ecuación (2.1) se denomina *singular* en estos puntos. Observemos que cuando $p = 2$, nos encontramos en el caso lineal y corresponde al operador de Laplace.

Notación 2.1. Notaremos al operador p-Laplaciano como

$$\Delta_p u = \operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u).$$

Ya observamos en la Introducción que el operador Δ_p presenta problemas cuando $\nabla u = 0$ para $1 < p \leq 2$. Es por esto que se define el operador p-Laplaciano en forma de divergencia como

$$\Delta_p(u) = \operatorname{div}(A_p(\nabla u)) = \nabla \cdot A_p(\nabla u)$$

donde el operador A_p se define como

$$A_p(\eta) = |\eta|^{p-2}\eta, \quad p \geq 2,$$
$$A_p(\eta) = \begin{cases} |\eta|^{p-2}\eta, & \text{si } \eta \neq 0 \\ 0, & \text{si } \eta = 0, \end{cases} \quad 1 < p \leq 2,$$

El operador p-Laplaciano aparece en muchos problemas no-lineales de la Física y la Mecánica. Bogнар, en [1], realiza una investigación analítica de problemas en el área de la mecánica de fluidos que se describen por medio de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales que involucran al operador p-Laplaciano. Bogнар estudió la ecuación de filtración turbulenta en medios porosos

$$\theta \frac{\partial u}{\partial t} = c^\alpha \lambda \operatorname{div} (|\nabla u^n|^{p-2} \nabla u^n), \quad (2.2)$$

donde la constante θ es positiva, $n > 0$ y $p > 1$. Además, $np > 1$. Si ponemos a escala las constantes en (2.2), obtenemos que

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta_p u^n. \quad (2.3)$$

Recordamos que un fluido no-Newtoniano es aquel que no satisface la Ley viscosidad de Newton, la cual establece que la fuerza por unidad de área es proporcional a la disminución de la velocidad con la distancia. Entonces, en este contexto, se obtiene un caso particular de la ecuación (2.3), que es la denominada ecuación de *filtración no-Newtoniana* o *ecuación p-Laplaciana de evolución*

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta_p u. \quad (2.4)$$

Observar que en el caso estacionario, es decir, cuando u es independiente del tiempo, se obtiene la ecuación homogénea

$$\Delta_p u = 0.$$

2.2. Preliminares en espacios normados

En esta sección, vamos a introducir conceptos básicos del Análisis Funcional que serán de utilidad a lo largo de la tesis.

Definición 2.1. Sea V un espacio vectorial sobre \mathbb{R} . Un *funcional lineal* es una aplicación lineal definida sobre V , o sobre un subespacio vectorial de V , con valores en \mathbb{R} .

Notación 2.2. Se designa V' al *dual topológico* de V , es decir, el espacio de los *funcionales lineales y continuos sobre V* ; V' está dotado de la norma dual

$$\|u\|_{V'} = \sup_{x \in V: \|x\| \leq 1} |u(x)| = \sup_{x \in V: \|x\| \leq 1} u(x).$$

Cuando $u \in V'$ y $x \in V$ se nota generalmente $\langle u, x \rangle$ en lugar de $u(x)$; se dice que \langle, \rangle es el *producto escalar* en la dualidad de V', V .

Definición 2.2 (Espacio de Banach). Decimos que un espacio vectorial normado B es un espacio de Banach si es completo con respecto a su norma, es decir, si (x_n) es una sucesión de Cauchy en B , entonces existe $x \in B$ tal que (x_n) converge a x .

A continuación, introduciremos una nueva topología en el espacio normado B .

Definición 2.3. La *topología débil* $\sigma(B, B')$ sobre B es la topología menos fina sobre B que hace continuas a todas las aplicaciones $u \in B'$.

Notación 2.3. Dada una sucesión (x_n) en B , se designa por $x_n \rightarrow x$ la convergencia de x_n a x en la topología débil $\sigma(B, B')$. Decimos x_n converge débilmente a x en $\sigma(B, B')$.

La siguiente proposición brinda propiedades esenciales de la convergencia débil.

Proposición 2.1. Sea (x_n) una sucesión en B . Se verifica:

- I. $x_n \rightarrow x$ en $\sigma(B, B')$ si y sólo si $\langle u, x_n \rangle \rightarrow \langle u, x \rangle$ para toda $u \in B'$.
- II. Si $x_n \rightarrow x$ fuertemente, es decir, si $\|x_n - x\| \rightarrow 0$, entonces $x_n \rightarrow x$ en $\sigma(B, B')$.
- III. Si $x_n \rightarrow x$ en $\sigma(B, B')$, entonces $\|x_n\|$ está acotada y $\|x\| \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \|x_n\|$.

Teorema 2.1 (Teorema de Hahn-Banach). Sea $f : B \rightarrow \mathbb{R}$ que cumple $f(\alpha x) = \alpha f(x)$ para cada $x \in B$ y $\alpha \in \mathbb{R}$, y $f(x + y) \leq f(x) + f(y)$ para todos $x, y \in B$. Sea \tilde{B} un subespacio de B y g una aplicación lineal definida en \tilde{B} tal que $g(x) \leq f(x)$ para cada $x \in \tilde{B}$. Entonces existe una forma lineal u definida en B que extiende al funcional g , es decir $g = u$ en \tilde{B} y $u \leq f$ en B .

Sea B un espacio de Banach y B' su espacio dual dotado de la norma $\|u\|_{B'} = \sup_{x \in B, \|x\| \leq 1} |\langle u, x \rangle|$, y sea B'' su espacio bidual, es decir, el espacio dual de B' (funcionales lineales y continuos con valores reales definidos en B') con la norma

$$\|U\|_{B''} = \sup_{u \in B', \|u\|_{B'} \leq 1} |\langle U, u \rangle|.$$

Entonces podemos definir una aplicación inyectiva $J : B \rightarrow B''$ de la siguiente manera: sea $x \in B$ fijo, entonces la aplicación $u \mapsto \langle u, x \rangle$ que va de B' a \mathbb{R} es un funcional lineal continuo sobre B' , es decir, es un elemento del espacio dual de B' y por lo tanto está en B'' . Así J asigna a cada elemento x de B , la aplicación $u \mapsto \langle u, x \rangle$, es decir

$$\langle J(x), u \rangle = \langle u, x \rangle$$

para cada $u \in B'$ y $x \in B$. Entonces, por un lado vemos que J es lineal y, además si $x \in B$, entonces

$$\|J(x)\|_{B''} = \sup_{\|u\|_{B'} \leq 1} |\langle J(x), u \rangle| = \sup_{\|u\|_{B'} \leq 1} |\langle u, x \rangle| = \|x\| \quad (2.5)$$

ya que, por un lado, si $x \in B$ y $x \neq 0$, entonces $y = \frac{x}{\|x\|}$ tiene norma unitaria en B , así si $u \in B'$ cumple $\|u\|_{B'} \leq 1$, entonces $|\langle u, y \rangle| \leq 1$. Luego, $\frac{1}{\|x\|} |\langle u, x \rangle| \leq 1$, por lo tanto $|\langle u, x \rangle| \leq \|x\|$, y como esto vale para cualquier $u \in B'$ tal que $\|u\|_{B'} \leq 1$, se cumple $\sup_{\|u\|_{B'} \leq 1} |\langle u, x \rangle| \leq \|x\|$. Por otro lado, existe un funcional $v \in B'$ tal que $\|v\| = \|x\|$ y $\langle v, x \rangle = \|x\|^2$ (este resultado es un corolario del Teorema 2.1). Entonces si llamamos $w = \frac{1}{\|x\|} v$, vemos que $\|w\| = 1$ y $\langle w, x \rangle = \|x\|$. Finalmente, notemos que si $x = 0$, la desigualdad (2.5) se satisface trivialmente. Luego, hemos probado que J es una isometría. Ahora bien, puede que J no sea sobreyectiva. Tenemos entonces la siguiente definición.

Definición 2.4. Sea B un espacio de Banach y sea J la inyección canónica de B en B'' . Se dice que B es reflexivo si $J(B) = B''$.

La siguiente propiedad de espacios reflexivos será ampliamente utilizada en el presente trabajo.

Teorema 2.2. Sea B un espacio de Banach reflexivo y sea (x_n) una sucesión acotada en B . Entonces existe una subsucesión (x_{n_k}) que converge débilmente.

2.3. Espacios L^p

Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ abierto. Se designa por $L^1(\Omega)$ al espacio de las funciones integrables sobre Ω con valores reales. Se escribe

$$\|u\|_{L^1(\Omega)} := \int_{\Omega} |u(x)| \, dx.$$

Se identifican dos funciones de L^1 si coinciden en casi todo punto (es decir, iguales salvo un conjunto de medida nula). En general, se tiene la siguiente definición.

Definición 2.5. Sea $p \in \mathbb{R}$ con $1 \leq p < \infty$; se define

$$L^p(\Omega) = \{u : \Omega \rightarrow \mathbb{R} : u \text{ es medible y } |u|^p \in L^1(\Omega)\}.$$

Y se define la siguiente norma

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} = \left[\int_{\Omega} |u(x)|^p \, dx \right]^{1/p}.$$

Definición 2.6. Se define

$$L^\infty(\Omega) = \{u : \Omega \rightarrow \mathbb{R} : u \text{ es medible y existe una constante } C \text{ tal que } |u(x)| \leq C \text{ c.t.p. en } \Omega\}.$$

y se define la norma

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega)} = \inf\{C : |u(x)| \leq C \text{ en casi todo punto de } \Omega\}.$$

Definición 2.7. Sea $1 \leq p \leq \infty$; se dice que una función u está en $L^p_{loc}(\Omega)$ si $u|_K \in L^p(\Omega)$ para todo compacto $K \subset \Omega$.

A continuación, recordamos algunos resultados importantes para funciones en L^p .

Teorema 2.3 (Teorema de Convergencia Dominada de Lebesgue). Sea $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de funciones integrables. Supongamos que $u_n(x) \rightarrow u(x)$ en casi todo punto de Ω y que existe una función $v \in L^1(\Omega)$ tal que, para cada n , $|u_n(x)| \leq v(x)$ en casi todo punto de Ω . Entonces $u \in L^1(\Omega)$ y $\|u_n - u\|_{L^1(\Omega)} \rightarrow 0$.

Lema 2.1 (Lema de Fatou). Sea (u_n) una sucesión de funciones integrables en Ω tal que para cada n , $u_n \geq 0$ en casi todo punto en Ω y $\sup_n \int_{\Omega} u_n < \infty$. Entonces, si ponemos $u(x) = \liminf_{n \rightarrow \infty} u_n(x)$, $u \in L^1(\Omega)$ y además

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} u_n(x) \geq \int_{\Omega} u(x).$$

Definición 2.8. Definimos como $\mathcal{C}_0(\Omega)$ al espacio de las funciones continuas y con soporte compacto en Ω .

Teorema 2.4 (Teorema de densidad). El espacio $\mathcal{C}_0(\Omega)$ es denso en $L^1(\Omega)$, es decir, para cada $u \in L^1(\Omega)$ y para cada $\varepsilon > 0$ existe $v \in \mathcal{C}_0(\Omega)$ tal que $\|u - v\|_{L^1(\Omega)} < \varepsilon$.

Notación 2.4. Sea $1 \leq p < \infty$, se designa por p' al *exponente conjugado* de p , es decir $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$.

Teorema 2.5 (Desigualdad de Hölder). Sean $u \in L^p(\Omega)$ y $v \in L^{p'}(\Omega)$ con $1 \leq p < \infty$. Entonces $uv \in L^1(\Omega)$ y

$$\int_{\Omega} |uv| \leq \|u\|_{L^p(\Omega)} \|v\|_{L^{p'}(\Omega)}.$$

Teorema 2.6. Sean (u_n) una sucesión en $L^p(\Omega)$ y $u \in L^p(\Omega)$, tales que $\|u_n - u\|_{L^p(\Omega)} \rightarrow 0$. Entonces existe una subsucesión (u_{n_k}) tal que $u_{n_k}(x) \rightarrow u(x)$ en casi todo punto de Ω .

El siguiente resultado, junto con el Teorema 2.2, implican que si (u_n) es una sucesión acotada en L^p con $1 < p < \infty$, entonces (u_n) tiene una subsucesión que converge débilmente en L^p .

Teorema 2.7. L^p es reflexivo para $1 < p < \infty$.

Teorema 2.8 (Teorema de representación de Riesz). Sea $1 < p < \infty$ y $\varphi \in (L^p(\Omega))'$. Entonces existe una única función $u \in L^{p'}(\Omega)$ tal que

$$\langle \varphi, v \rangle = \int_{\Omega} uv$$

para toda $v \in L^p(\Omega)$. Además, $\|u\|_{L^{p'}(\Omega)} = \|\varphi\|_{(L^p(\Omega))'}$.

El Teorema 2.8 expresa que todo funcional lineal continuo sobre L^p con $1 < p < \infty$ se representa por medio de una función de $L^{p'}$. La aplicación $\varphi \mapsto u$ es un operador lineal isométrico y sobreyectivo que permite identificar el dual de L^p con $L^{p'}$. Por lo tanto, haremos la identificación $(L^p)' = L^{p'}$. Ahora bien, como cada funcional φ sobre $L^p(\Omega)$ es representado por una función u en $L^{p'}(\Omega)$ como

$$\langle \varphi, v \rangle = \int_{\Omega} uv \quad \text{para toda } v \in L^p(\Omega) \tag{2.6}$$

vemos que la noción de convergencia débil puede definirse de la siguiente manera: dada una sucesión (v_n) en $L^p(\Omega)$ y una función $v \in L^p(\Omega)$, sabemos por la Proposición 2.1 que v_n converge débilmente a v en $L^p(\Omega)$, si cumple $\langle \varphi, v_n \rangle \rightarrow \langle \varphi, v \rangle$ para toda $\varphi \in (L^p(\Omega))'$. Ahora bien, por el Teorema 2.8, cada $\varphi \in (L^p(\Omega))'$ es representada por una única función $u \in L^{p'}(\Omega)$ como en (2.6), por lo tanto $v_n \rightharpoonup v$ en $L^p(\Omega)$ si y sólo si

$$\int_{\Omega} uv_n \rightarrow \int_{\Omega} uv \quad \text{para toda } u \in L^{p'}(\Omega).$$

Teorema 2.9 (Densidad). El espacio $\mathcal{C}_0(\Omega)$ es denso en $L^p(\Omega)$ para $1 \leq p < \infty$.

El teorema anterior puede generalizarse para concluir que las funciones en los espacios L^p pueden aproximarse por funciones con grado de regularidad arbitraria. Antes de enunciar este resultado, damos la siguiente definición.

Definición 2.9. Se define el espacio de las funciones \mathcal{C}^k como

$$\mathcal{C}^k(\Omega) := \{u \in \mathcal{C}(\Omega) : \partial_i u \in \mathcal{C}^{k-1}(\Omega) \text{ para cada } i = 1, \dots, n\}.$$

y el espacio de las funciones *infinitamente diferenciables* como

$$\mathcal{C}^\infty(\Omega) := \{u \in \mathcal{C}^k(\Omega) \text{ para todo } k \in \mathbb{N}\}.$$

Teorema 2.10. El espacio $\mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ es denso en $L^p(\Omega)$ para cada $1 \leq p < \infty$.

2.4. Convexidad y semi-convexidad

Definición 2.10 (Convexidad y concavidad). Decimos que una función $u : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ es *convexa* si para cada par de puntos $x, y \in \mathbb{R}^n$ y para cada $\lambda \in [0, 1]$, u satisface

$$u(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda u(x) + (1 - \lambda)u(y) \quad (2.7)$$

Una función u es *cóncava* si $-u$ es convexa.

Vemos, entonces, que una función u es cóncava si $u(\lambda x + (1 - \lambda)y) \geq \lambda u(x) + (1 - \lambda)u(y)$.

Ahora daremos un lema que permite caracterizar a las funciones convexas (cóncavas). Para ello, recordemos antes que una matriz $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es definida no-negativa si cumple que $Ax \cdot x \geq 0$ para cada $x \in \mathbb{R}^n$ y notamos $A \geq 0$. En forma análoga se definen las matrices definidas no-positivas, positivas y negativas.

Lema 2.2. Sea $u \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^n)$, entonces u es convexa si y sólo si $\nabla^2 u(x) \geq 0$, para cada $x \in \mathbb{R}^n$.

Observemos que para el caso de las funciones cóncavas se cumple $\nabla^2 u(x) \leq 0$ en todo punto x de \mathbb{R}^n .

Definición 2.11 (Semiconvexidad y semiconcavidad). Sea $u : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua. Decimos que u es *semicóncava* si y sólo si existe una constante $C \geq 0$ tal que

$$u(x + h) + u(x - h) - 2u(x) \leq C|h|^2 \quad (2.8)$$

para todos $x, h \in \mathbb{R}^n$. La constante C se denomina *constante de semiconcavidad* de la función u . Decimos que una función continua u es *semiconvexa* si $-u$ es *semicóncava*.

Notemos que una función u es *semiconvexa* si y sólo si existe una constante C tal que para todos $x, h \in \mathbb{R}^n$ u satisface $u(x + h) + u(x - h) - 2u(x) \geq -C|h|^2$.

Proposición 2.2 (Caracterización de funciones *semicóncavas*). Sea $u : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1. u es *semicóncava* con constante $C \geq 0$, es decir, u satisface (2.8);

2. Para cada par de puntos x e y de \mathbb{R}^n y para cada $0 < \lambda < 1$, u cumple

$$\lambda u(x) + (1 - \lambda)u(y) - u(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq C \frac{\lambda(1 - \lambda)}{2} |x - y|^2;$$

3. La función $\phi(x) := u(x) - \frac{C}{2}|x|^2$ es cóncava;

4. Vale la siguiente desigualdad

$$-\nabla^2 u(x) + CI_n \geq 0 \tag{2.9}$$

en un sentido viscoso, es decir, para cada punto $x_0 \in \mathbb{R}^n$ y para cada $\varphi \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^n)$ tal que $u - \varphi$ alcanza un mínimo en x_0 , se cumple $-\nabla^2 \varphi(x_0) + CI_n \geq 0$. I_n denota la matriz identidad de tamaño $n \times n$.

Ejemplo 1. La función $u(x) = |x|$ no es semicóncava en 0 ya que la desigualdad viscosa (2.9) no se cumple para ninguna constante $C > 0$ en el origen. En efecto, si $C > 0$ y $\varphi(x) = C|x|^2$, entonces $u - \varphi$ tiene un mínimo local en 0, ya que $u(0) = \varphi(0)$ y si $|x| \leq \frac{1}{C}$, entonces $\varphi(x) = C|x|^2 \leq C\frac{1}{C}|x| = u(x)$. Además, $\nabla^2 \varphi(x) = 2CI_n > CI_n$. Por lo tanto, por la Proposición 2.2, u no es semicóncava en $x = 0$.

Ejemplo 2. Si $u(x) = |x|^2$, vemos que $u \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^n)$ y $\nabla^2 u(x) = 2I_n$ en todo punto $x \in \mathbb{R}^n$. Luego, u es tanto semicóncava como semiconvexa con constante $C = 2$.

Vemos que cualquier función $u \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^n)$ es semicóncava y semiconvexa en cualquier dominio acotado de \mathbb{R}^n .

2.4.1. Convoluciones infimales

Definición 2.12. Sea Ω un subconjunto abierto de \mathbb{R}^n . Se define la convolución infimal o inf-convolución de una función $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ como

$$u_\varepsilon(x) = \inf_{y \in \Omega} \left(u(y) + \frac{|x - y|^q}{q\varepsilon^{q-1}} \right), \tag{2.10}$$

donde $q \geq 2$ y $\varepsilon > 0$.

Proposición 2.3. Sea $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ una función semicontinua inferior y acotada en Ω . Entonces las siguientes afirmaciones son válidas:

(I) Existe $r(\varepsilon) > 0$ tal que

$$u_\varepsilon(x) = \inf_{y \in B_{r(\varepsilon)}(x) \cap \Omega} \left(u(y) + \frac{|x - y|^q}{q\varepsilon^{q-1}} \right).$$

Más aún, $r(\varepsilon) \rightarrow 0$ cuando $\varepsilon \rightarrow 0$.

(II) La sucesión (u_ε) es creciente y converge puntualmente a u en Ω .

(III) u_ε definida como en (I) es semicóncava en $\Omega_{r(\varepsilon)} := \{x \in \Omega : \text{dist}(x, \partial\Omega) > r(\varepsilon)\}$ y la constante de semiconcavidad depende de q , ε y de la *oscilación de u* : $\text{osc}_\Omega u := \sup_\Omega u - \inf_\Omega u$.

Demostración. (I) Sea $M = \sup_{\Omega} u$ y $m = \inf_{\Omega} u$. Sea $r = r(\varepsilon) > 0$ de manera tal que

$$\frac{r^q}{q\varepsilon^{q-1}} = M - m.$$

Entonces vemos que $r(\varepsilon) \rightarrow 0$ cuando $\varepsilon \rightarrow 0$. Observar

$$u_{\varepsilon}(x) \leq \inf_{y \in B_{r(\varepsilon)}(x) \cap \Omega} \left(u(y) + \frac{|x - y|^q}{q\varepsilon^{q-1}} \right)$$

para cada x en Ω . En particular, por definición de ínfimo

$$\inf_{y \in B_{r(\varepsilon)}(x) \cap \Omega} \left(u(y) + \frac{|x - y|^q}{q\varepsilon^{q-1}} \right) \leq u(z) + \frac{|x - z|^q}{q\varepsilon^{q-1}} \quad (2.11)$$

para cada $z \in B_{r(\varepsilon)}(x) \cap \Omega$. Ahora bien, si tomamos un punto $z \in \Omega \setminus B_{r(\varepsilon)}(x)$ vemos que

$$u(x) \leq M \leq m + \frac{r^q}{q\varepsilon^{q-1}} \leq u(z) + \frac{|x - z|^q}{q\varepsilon^{q-1}}.$$

Así

$$\inf_{y \in B_{r(\varepsilon)}(x) \cap \Omega} \left(u(y) + \frac{|x - y|^q}{q\varepsilon^{q-1}} \right) \leq u(z) + \frac{|x - z|^q}{q\varepsilon^{q-1}} \quad (2.12)$$

para cada $z \in \Omega \setminus B_{r(\varepsilon)}(x)$. Combinando (2.11) y (2.12), concluimos que

$$u_{\varepsilon}(x) = \inf_{y \in B_{r(\varepsilon)}(x) \cap \Omega} \left(u(y) + \frac{|x - y|^q}{q\varepsilon^{q-1}} \right)$$

para cada $x \in \Omega$.

(II) Se sigue de la definición de u_{ε} y de (I) que la sucesión (u_{ε}) es creciente. Ahora bien para cada ε la diferencia

$$u(x) - u_{\varepsilon}(x) \geq 0$$

Además, por definición de ínfimo, para cada $\varepsilon > 0$, existe $y_{\varepsilon} \in B_{r(\varepsilon)} \cap \Omega$ tal que

$$u_{\varepsilon}(x) > u(y_{\varepsilon}) + \frac{|x - y_{\varepsilon}|^q}{q\varepsilon^{q-1}} - \varepsilon.$$

Entonces

$$\begin{aligned} 0 \leq \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} (u(x) - u_{\varepsilon}(x)) &\leq \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(u(x) - u(y_{\varepsilon}) - \frac{|x - y_{\varepsilon}|^q}{q\varepsilon^{q-1}} + \varepsilon \right) \\ &= u(x) - \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} u(y_{\varepsilon}) \leq 0, \end{aligned}$$

ya que u es semicontinua inferior. Así se obtiene que la sucesión (u_{ε}) converge a $u(x)$ cuando ε tiende a 0.

(III) Tomemos un punto $x \in \Omega_{r(\varepsilon)}$ y un punto $y \in B_{r(\varepsilon)}(x) \cap \Omega$ donde $r = r(\varepsilon)$ es un número positivo tal que

$$\frac{r^q}{q\varepsilon^{q-1}} = \text{osc}_{\Omega} u.$$

Definimos $\varphi_y(x) = u(y) + \frac{|x-y|^q}{q\varepsilon^{q-1}}$. Como el parámetro $q \geq 2$ vemos que φ_y es continuamente diferenciable y, además

$$\begin{aligned} \nabla^2 \varphi_y(x) &= \frac{1}{\varepsilon^{q-1}} |x-y|^{q-2} I + \frac{1}{\varepsilon^{q-1}} (q-2) |x-y|^{q-4} (x-y) \otimes (x-y) \\ &\leq \frac{(q-1)}{\varepsilon^{q-1}} |x-y|^{q-2} I. \end{aligned}$$

donde $(x-y) \otimes (x-y)$ denota el producto tensorial de $(x-y)$ por sí mismo, es decir, $[(x-y) \otimes (x-y)]_{i,j} = (x_i - y_i)(x_j - y_j)$. Sea

$$C = \frac{(q-1)}{\varepsilon^{q-1}} r(\varepsilon)^{q-2}.$$

Entonces, para cada $y \in B_{r(\varepsilon)}(x) \cap \Omega$, $\nabla^2 \varphi_y(x) \leq CI$. Luego, la función $\varphi_y(x) - \frac{C}{2}|x|^2$ es cóncava para todo $y \in B_{r(\varepsilon)}(x) \cap \Omega$. Luego, tomando ínfimo obtenemos que la función

$$\inf_{y \in B_{r(\varepsilon)}(x) \cap \Omega} \left(\varphi_y(x) - \frac{C}{2}|x|^2 \right) = u_\varepsilon(x) - \frac{C}{2}|x|^2$$

es cóncava. Así, por la Proposición 2.2 u_ε es semicóncava. ■

Teorema 2.11 (Teorema de Aleksandrov). Si $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ es semicóncava o semiconvexa, entonces u es dos veces diferenciable en casi todo punto en Ω .

De la Proposición 2.3 (III) y el Teorema 2.11 se obtiene que u_ε es dos veces diferenciable en casi todo punto y

$$\nabla^2 u_\varepsilon(x) \leq CI$$

en casi todo punto x de $\Omega_{r(\varepsilon)}$.

2.5. Espacios de Sobolev

Muchas veces, a lo largo del trabajo, las soluciones a la ecuación (2.1) pertenecerán a ciertos espacios conocidos con el nombre de *espacios de Sobolev*. La teoría de espacios de Sobolev puede encontrarse desarrollada en forma extensa en [8], sin embargo daremos algunas definiciones y propiedades por conveniencia del lector. En esta sección Ω es un subconjunto abierto de \mathbb{R}^n .

Antes de proporcionar la definición formal de Espacios de Sobolev, primero recordemos lo siguiente: supongamos que tenemos una función $u \in \mathcal{C}^1(\Omega)$ y una función $\varphi \in \mathcal{C}_0^1(\Omega)$. Entonces vale la Fórmula de Integración por Partes, es decir, se satisface la siguiente igualdad

$$\int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i} \varphi = - \int_{\Omega} u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}$$

para cada i tal que $1 \leq i \leq n$. La siguiente definición busca axiomatizar esta última fórmula para aquellas funciones que no son diferenciables. Tenemos, entonces, la siguiente noción *débil* de diferenciabilidad.

Definición 2.13. Sea $u \in L^1_{loc}(\Omega)$. Una función $v \in L^1_{loc}(\Omega)$ se denomina *derivada débil* de u en la dirección x_i si

$$\int_{\Omega} \varphi v \, dx = - \int_{\Omega} u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \, dx \quad (2.13)$$

para toda $\varphi \in \mathcal{C}_0^1(\Omega)$.

Una función u se dice *débilmente diferenciable* si posee derivada débil en la dirección x_i para cada $i \in \{1, \dots, n\}$.

Es claro a partir de la introducción que una función $u \in \mathcal{C}^1(\Omega)$ es débilmente diferenciable, y las derivadas débiles son simplemente las derivadas ordinarias. La ecuación (2.13) es, como observamos arriba, la fórmula de integración por partes. Así, la idea que está detrás de la definición de derivadas débiles es, como ya mencionamos, axiomatizar esta fórmula.

En general, se tiene la siguiente definición.

Definición 2.14. Sea $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ una función integrable, y sea $\alpha := (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}_0^n$ un multi-índice. Notamos la derivada de orden α de una función $\varphi \in \mathcal{C}^{|\alpha|}(\Omega)$ como

$$D_{\alpha} \varphi := \left(\frac{\partial}{\partial x_1} \right)^{\alpha_1} \dots \left(\frac{\partial}{\partial x_n} \right)^{\alpha_n} \varphi,$$

siendo $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$.

Una función integrable $v : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ se denomina *derivada débil de orden α de u* , si

$$\int_{\Omega} \varphi v \, dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} u D_{\alpha} \varphi \, dx \quad (2.14)$$

para toda $\varphi \in \mathcal{C}_0^{|\alpha|}(\Omega)$. Escribimos $v = D_{\alpha} u$.

Para $k \in \mathbb{N}$, $1 \leq p \leq \infty$, definimos el *espacio de Sobolev*

$$W^{k,p}(\Omega) := \{u \in L^p(\Omega) : D_{\alpha} u \in L^p(\Omega) \text{ para todo } \alpha : |\alpha| \leq k\}.$$

En el espacio de Sobolev $W^{k,p}$ se define la siguiente norma, para $1 \leq p < \infty$

$$\|u\|_{W^{k,p}} = \left(\sum_{|\alpha| \leq k} \int_{\Omega} |D_{\alpha} u|^p \right)^{\frac{1}{p}},$$

y,

$$\|u\|_{W^{k,\infty}} = \sup_{|\alpha| \leq k} \|D_{\alpha} u\|_{L^{\infty}(\Omega)}.$$

Los espacios $H^{k,p}$ y $H_0^{k,p}$ se definen como las clausuras de $\mathcal{C}^{\infty}(\Omega)$ y $\mathcal{C}_0^{\infty}(\Omega)$ respectivamente, con respecto a la norma $\|\cdot\|_{W^{k,p}}$.

En este trabajo nos concentraremos en el caso $k = 1$ y para todo $1 < p \leq \infty$. Por simplicidad, para una función $u \in W^{1,p}(\Omega)$, notaremos a las derivadas débiles de u como $\partial_i u$ para cada $i = 1, \dots, n$. Y denotaremos al vector $(\partial_1 u, \dots, \partial_n u)$ como ∇u .

Teorema 2.12. El espacio de Sobolev $W^{k,p}(\Omega)$ es completo con respecto a la norma $\|\cdot\|_{W^{k,p}(\Omega)}$, es decir, es un espacio de Banach. Además, $W^{k,p}(\Omega) = H^{k,p}(\Omega)$, lo que significa que las funciones $C^\infty(\Omega)$ son densas en las de Sobolev.

Proposición 2.4 (Desigualdad de Poincaré). Sea $u \in H_0^{1,p}(\Omega)$, entonces

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \leq \left(\frac{m(\Omega)}{\omega_n} \right)^{\frac{1}{n}} \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}.$$

donde $m(\Omega)$ es la medida de Ω y ω_n es la medida de la bola unitaria en \mathbb{R}^n . En particular, para cada $u \in H_0^{1,p}(\Omega)$, su norma $W^{1,p}$ está controlada por la norma L^p de su gradiente:

$$\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} \leq \left(1 + \frac{m(\Omega)}{\omega_n} \right)^{\frac{1}{n}} \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}.$$

2.5.1. Trazas para funciones Sobolev

Para una función Sobolev u en $W^{1,p}(\Omega)$ el operador de trazas que definiremos en el siguiente teorema brinda una forma de asignar valores a u en la frontera de Ω .

Teorema 2.13. Sea $1 \leq p < \infty$. Supongamos que Ω es acotado con frontera $\partial\Omega$ de clase C^1 . Entonces, existe un operador lineal y acotado:

$$T : W^{1,p}(\Omega) \rightarrow L^p(\partial\Omega),$$

tal que:

1. Si $u \in W^{1,p}(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$, entonces $T(u) = u|_{\partial\Omega}$.
2. Existe una constante $C > 0$, que depende de p y Ω , tal que:

$$\|T(u)\|_{L^p(\partial\Omega)} \leq C \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}$$

para toda $u \in W^{1,p}(\Omega)$.

En el contexto del teorema anterior, $T(u)$ se denomina la traza de u en la frontera $\partial\Omega$.

El siguiente teorema muestra una relación entre el operador de traza y el espacio de Sobolev $W_0^{1,p}(\Omega)$.

Teorema 2.14. Sea $1 \leq p < \infty$. Supongamos que Ω es acotado con frontera $\partial\Omega$ de clase C^1 . Sea $u \in W^{1,p}(\Omega)$. Entonces:

$$u \in W_0^{1,p}(\Omega) \text{ si y solo si } T(u) = 0 \text{ en } \partial\Omega.$$

En vista del teorema anterior, las funciones en $W_0^{1,p}(\Omega)$ son exactamente aquellas funciones Sobolev que se anulan en la frontera de Ω en el sentido de trazas. Además, al igual que $H^{1,p}(\Omega) = W^{1,p}(\Omega)$, se cumple que, para aquellas funciones Sobolev que se anulan en $\partial\Omega$ en el sentido de trazas, $H_0^{1,p}(\Omega) = W_0^{1,p}(\Omega)$, es decir, las funciones $C_0^\infty(\Omega)$ son densas en las funciones $W_0^{1,p}(\Omega)$. Para más información sobre trazas y para consultar las demostraciones de los teoremas anteriores, se invita al lector a la referencia [5].

2.6. Soluciones débiles, viscosas y viscosas Feeble

Las tres nociones de solución de (2.1) que manejaremos son: solución débil, solución viscosa y solución viscosa Feeble. La noción de solución viscosa es la que emplean Medina y Ochoa en [16] y la noción Feeble es la que utilizan Juutinen y Lindqvist en [10] para el caso del p-Laplaciano homogéneo. Debajo damos ambas definiciones y, en el caso de la solución Feeble, la adaptamos para el p-Laplaciano no-homogéneo.

2.6.1. Soluciones débiles

Motivación

Supongamos primero que tenemos una función $u \in \mathcal{C}^2(\Omega)$ solución clásica de la ecuación (2.1), es decir, u satisface puntualmente la ecuación (2.1) en Ω . Entonces si multiplicamos la ecuación por una función $\psi \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ e integramos sobre Ω obtenemos

$$\int_{\Omega} -\Delta_p u \psi \, dx = \int_{\Omega} f(x, u, \nabla u) \psi \, dx.$$

Por otro lado, integrando por partes el lado izquierdo de la igualdad de arriba obtenemos que

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} -\Delta_p u \psi \, dx &= \int_{\Omega} -\operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2} \nabla u) \psi \, dx \\ &= \int_{\Omega} |\nabla u|^{p-2} \nabla u \cdot \nabla \psi \, dx \end{aligned}$$

Así

$$\int_{\Omega} |\nabla u|^{p-2} \nabla u \cdot \nabla \psi \, dx = \int_{\Omega} f(x, u, \nabla u) \psi \, dx. \quad (2.15)$$

Recíprocamente, si $u \in \mathcal{C}^2(\Omega)$ verifica (2.15) para toda función $\psi \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$, entonces u es solución clásica de (2.1). Esto motiva a la siguiente definición.

Definición 2.15 (Solución débil de Sobolev). Una función $u \in W_{loc}^{1,p}(\Omega)$ es una *supersolución débil* de (2.1) si

$$\int_{\Omega} |\nabla u|^{p-2} \nabla u \cdot \nabla \psi \geq \int_{\Omega} f(x, u, \nabla u) \cdot \psi \quad (2.16)$$

para toda función no negativa $\psi \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$. Por otro lado, u es una subsolución débil si $-u$ es una supersolución débil de la ecuación

$$-\Delta_p u = -f(x, -u, -\nabla u) \quad (2.17)$$

Decimos que u es una solución débil si es tanto una subsolución como una supersolución débil de (2.1). Notemos que u es subsolución débil de (2.1) si y sólo si satisface

$$\int_{\Omega} |\nabla u|^{p-2} \nabla u \cdot \nabla \psi \leq \int_{\Omega} f(x, u, \nabla u) \psi$$

para cada $\psi \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$, $\psi \geq 0$. En efecto, si $\psi \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ es una función test no-negativa y u es una subsolución débil de (2.1), entonces sabemos, por definición, que $-u$ es una supersolución débil de (2.17). Por lo tanto,

$$\int_{\Omega} |\nabla(-u)|^{p-2} \nabla(-u) \cdot \nabla \psi \geq \int_{\Omega} -f(x, -(-u), -\nabla(-u)) \psi.$$

Así

$$- \int_{\Omega} |\nabla(u)|^{p-2} \nabla u \cdot \nabla \psi \geq \int_{\Omega} -f(x, u, \nabla u) \psi.$$

Luego, vemos que u es solución débil de (2.1) si y sólo si, para cada $\psi \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ no-negativa satisface

$$\int_{\Omega} |\nabla u|^{p-2} \nabla u \cdot \nabla \psi = \int_{\Omega} f(x, u, \nabla u) \psi.$$

2.6.2. Soluciones viscosas

Tomemos una función $u \in \mathcal{C}^2(\Omega)$. Entonces, si calculamos formalmente el p-Laplaciano de u obtenemos

$$\begin{aligned} \Delta_p u &= \operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2} \nabla u) \\ &= \sum_{i=1}^n \partial_i (|\nabla u|^{p-2} \partial_i u) \\ &= \sum_{i=1}^n (\partial_i (|\nabla u|^{p-2}) \partial_i u + |\nabla u|^{p-2} \partial_{ii} u) \\ &= \sum_{i=1}^n \left(\partial_i \left[\left(\sum_{j=1}^n (\partial_j u)^2 \right)^{\frac{p-2}{2}} \right] \partial_i u + |\nabla u|^{p-2} \partial_{ii} u \right) \\ &= \sum_{i=1}^n \left(\left[(p-2) |\nabla u|^{p-4} \sum_{j=1}^n \partial_j u \partial_{ij} u \right] \partial_i u \right) + \sum_{i=1}^n |\nabla u|^{p-2} \partial_{ii} u \\ &= (p-2) |\nabla u|^{p-4} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \partial_j u \partial_{ij} u \partial_i u + |\nabla u|^{p-2} \operatorname{tr}(\nabla^2 u) \\ &= (p-2) |\nabla u|^{p-4} (\nabla^2 u \nabla u) \cdot \nabla u + |\nabla u|^{p-2} \operatorname{tr}(\nabla^2 u) \\ &= |\nabla u|^{p-2} \left(\frac{(p-2)}{|\nabla u|^2} (\nabla^2 u \nabla u) \cdot \nabla u + \operatorname{tr}(\nabla^2 u) \right) \end{aligned}$$

Así, podemos escribir la ecuación (2.1) como una ecuación homogénea dada por un operador $F(x, s, \eta, \mathcal{X})$, es decir

$$-\Delta_p u = f(x, u, \nabla u) \Leftrightarrow F(x, u, \nabla u, \nabla^2 u) = 0$$

donde el operador F se define como

$$F(x, s, \eta, \mathcal{X}) = |\eta|^{p-2} \left(\frac{(p-2)}{|\eta|^2} \mathcal{X} \eta \cdot \eta + \operatorname{tr}(\mathcal{X}) \right) - f(x, s, \eta).$$

Vemos que para $p \geq 2$, el operador F es no-creciente respecto de la última variable \mathcal{X} , es decir, si $\mathcal{X} \leq \mathcal{Y}$, es decir, si $\mathcal{Y} - \mathcal{X}$ es definida no-negativa, entonces

$$F(x, s, \eta, \mathcal{X}) \geq F(x, s, \eta, \mathcal{Y}).$$

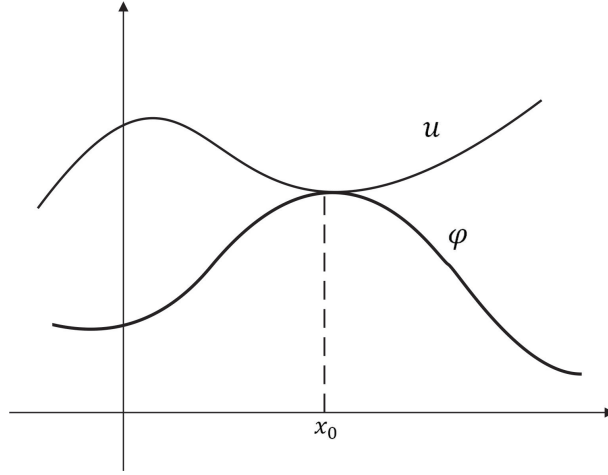
Esto es así ya que, por un lado $p - 2 \geq 0$ y, por otro, la traza de una matriz preserva el orden pues, si $\mathcal{X} \leq \mathcal{Y}$ en particular $(\mathcal{Y} - \mathcal{X})e_i \cdot e_i \geq 0$ para cada $1 \leq i \leq n$ donde e_i es el i -ésimo vector de la base canónica de \mathbb{R}^n . Pero $(\mathcal{Y} - \mathcal{X})e_i \cdot e_i = (\mathcal{Y} - \mathcal{X})_{ii}$, por lo tanto $\text{tr}(\mathcal{Y} - \mathcal{X}) = \sum_{i=1}^n (\mathcal{Y} - \mathcal{X})_{ii} \geq 0$.

Ahora tomemos una función $u \in \mathcal{C}^2(\Omega)$ solución clásica de la ecuación

$$F(x, u, \nabla u, \nabla^2 u) \geq 0, \quad (2.18)$$

es decir, u satisfacen puntualmente la ecuación (2.18).

Sea $x_0 \in \Omega$ y $\varphi \in \mathcal{C}^2(\Omega)$ que toca a la función u por debajo en el punto x_0 , es decir, $\text{mín}_\Omega(u - \varphi) = (u - \varphi)(x_0) = 0$.



Entonces, por el cálculo diferencial, vemos que

$$\begin{aligned} \nabla u(x_0) &= \nabla \varphi(x_0) \text{ y} \\ \nabla^2 u(x_0) &\geq \nabla^2 \varphi(x_0). \end{aligned}$$

Entonces, como F es no-creciente respecto de la última variable, se cumple

$$F(x_0, u(x_0), \nabla \varphi(x_0), \nabla^2 \varphi(x_0)) \geq F(x_0, u(x_0), \nabla u(x_0), \nabla^2 u(x_0)) \geq 0.$$

Podemos observar que los extremos de esta última desigualdad no dependen de las derivadas de la función u . Por lo tanto definimos, en forma generalizada, que una función u es una supersolución en cierto sentido de la ecuación $F(x, u, \nabla u, \nabla^2 u) = 0$ o bien $-\Delta_p u = f(x, u, \nabla u)$ si se cumple

$$F(x_0, u(x_0), \nabla \varphi(x_0), \nabla^2 \varphi(x_0)) \geq 0$$

para cada $\varphi \in \mathcal{C}^2(\Omega)$ con $\text{mín}_\Omega(u - \varphi) = (u - \varphi)(x_0) = 0$. Además, para este trabajo en especial pediremos una condición más sobre las funciones test que será muy útil para cumplir el objetivo principal.

Definición 2.16 (Solución viscosa Feeble). Decimos que $u \in C(\Omega)$ es una *supersolución viscosa Feeble* de (2.1) si, siempre que $x_0 \in \Omega$ y $\varphi \in C^2(\Omega)$ cumplan

1. $u(x_0) = \varphi(x_0)$,
2. $u(x) > \varphi(x)$, cuando $x \neq x_0$ y
3. $\nabla\varphi(x_0) \neq 0$,

tenemos

$$-\Delta_p\varphi(x_0) \geq f(x_0, u(x_0), \nabla\varphi(x_0)).$$

Por otro lado, una función u es una subsolución viscosa Feeble si $-u$ es una supersolución viscosa Feeble de la ecuación $-\Delta_p u = -f(x, -u, -\nabla u)$, y u es una solución viscosa Feeble si es tanto una subsolución y una supersolución viscosa Feeble.

Observemos que una función u es una subsolución viscosa Feeble de (2.1) si y sólo si, para cada $x_0 \in \Omega$ y $\varphi \in C^2(\Omega)$ tal que

- I. $u(x_0) = \varphi(x_0)$,
- II. $u(x) < \varphi(x)$ para cada $x \neq x_0$ y
- III. $\nabla\varphi(x_0) \neq 0$,

tenemos

$$-\Delta_p\varphi(x_0) \leq f(x_0, u(x_0), \nabla\varphi(x_0)).$$

En efecto, si $x_0 \in \Omega$ y $\varphi \in C^2(\Omega)$ satisface las condiciones I, II y III, entonces $-\varphi$ satisface las condiciones 1, 2 y 3 de supersolución viscosa Feeble para la función $-u$ en el punto x_0 , ya que $-u(x_0) = -\varphi(x_0)$, $-u(x) > -\varphi(x)$ si $x \neq x_0$ y $\nabla(-\varphi)(x_0) \neq 0$. Por lo tanto, como $-u$ es supersolución viscosa Feeble de $-\Delta_p u = -f(x, -u, -\nabla u)$, se cumple

$$-\Delta_p(-\varphi)(x_0) \geq -f(x_0, -(-u)(x_0), -\nabla(-\varphi)(x_0)),$$

es decir

$$\Delta_p\varphi(x_0) \geq -f(x_0, u(x_0), \nabla\varphi(x_0)).$$

Luego,

$$-\Delta_p\varphi(x_0) \leq f(x_0, u(x_0), \nabla\varphi(x_0)).$$

Observación 2.1. Notemos que la función test φ toca a la función u por debajo en el punto x_0 , es decir, $\min_{\Omega}(u - \varphi) = (u - \varphi)(x_0) = 0$. Además, observemos que si $\nabla\varphi(x_0) = 0$, entonces no hay ningún tipo de requisito. Aprovecharemos al máximo este hecho para probar la equivalencia entre las definiciones.

Definición 2.17 (Solución viscosa). Una función semicontinua inferior $u : \Omega \rightarrow (-\infty, +\infty]$ es una *supersolución viscosa* de (2.1) si $u \not\equiv +\infty$ y para cada $x_0 \in \Omega$ y $\phi \in C^2(\Omega)$ tal que

1. $u(x_0) = \phi(x_0)$,
2. $u(x) \geq \phi(x)$ y

3. $\nabla\phi(x) \neq 0$ para cada $x \neq x_0$ en un entorno de x_0 ,

se cumple

$$\lim_{r \rightarrow 0} \sup_{x \in B_r(x_0) \setminus \{x_0\}} (-\Delta_p \phi(x)) \geq f(x_0, u(x_0), \nabla\phi(x_0)). \quad (2.19)$$

Una función u es una subsolución viscosa si $-u$ es una supersolución viscosa de la ecuación $-\Delta_p u = -f(x, -u, -\nabla u)$, y es una solución viscosa si es tanto una subsolución y una supersolución viscosa.

Observación 2.2. Notemos que la condición (2.19) se establece de esta manera para evitar los problemas que se obtienen cuando $\nabla\phi(x_0) = 0$ en el caso en que $1 < p < 2$. Si $p \geq 2$, esta condición puede ser reemplazada simplemente por

$$-\Delta_p \phi(x_0) \geq f(x_0, u(x_0), \nabla u(x_0)).$$

Capítulo 3

Equivalencia entre soluciones débiles y viscosas Feeble

En este capítulo, veremos los principales resultados que plantean la equivalencia entre soluciones débiles y viscosas Feeble. Probaremos el Teorema 3.1, enunciado a continuación, basándonos en la equivalencia probada en [16] y realizando las adaptaciones necesarias para la Definición 2.16. Los resultados de esta sección son auxiliares y serán utilizados para probar la propiedad de tipo Radó enunciada en el próximo capítulo.

Teorema 3.1. Sea $1 < p < \infty$. Asumamos que $f = f(x, s, \eta)$ es uniformemente continua en $\Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, Lipschitz respecto de η , no-creciente en s , y satisface la siguiente condición de crecimiento

$$|f(x, s, \eta)| \leq \gamma(|s|)|\eta|^{p-1} + \phi(x), \quad (3.1)$$

donde $\gamma \geq 0$ es continua, y $\phi \in L_{loc}^\infty(\Omega)$. Además, supongamos que $f(x, s, 0) = 0$ para cada $x \in \Omega$ y $s \in \mathbb{R}$. Entonces, si $u \in L_{loc}^\infty(\Omega)$ es una supersolución viscosa Feeble de (2.1), u es una supersolución débil de (2.1).

Teorema 3.2. Supongamos que $f = f(x, s, \eta)$ es continua en $\Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, no-creciente en s , y Lipschitz continua respecto de η . Entonces se cumple lo siguiente:

- (I) Si $1 < p \leq 2$ y si $u \in W_{loc}^{1,\infty}(\Omega)$ es una supersolución débil de (2.1), entonces es una supersolución viscosa Feeble de (2.1) en Ω .
- (II) Si $p > 2$, $f(x, s, 0) = 0$ para $x \in \Omega$ y $s \in \mathbb{R}$, y si $u \in C^1(\Omega)$ es una supersolución débil de (2.1), entonces es una supersolución viscosa Feeble de (2.1) en Ω .
- (III) Finalmente, si $p > 2$ y si $u \in W_{loc}^{1,\infty}(\Omega)$ es una supersolución débil de (2.1), con $\nabla u \neq 0$ en Ω , entonces es una supersolución viscosa Feeble de (2.1).

Notemos que la hipótesis $f(x, s, 0) = 0$ para cada $x \in \Omega$ y $s \in \mathbb{R}$ es, en cierto modo, intuitiva ya que, si u es constante, entonces $-\Delta_p u = 0$, por lo tanto, debe ser $f(x, u, \nabla u) = 0$ para que la ecuación tenga sentido. Además esta hipótesis permite evitar, en algunos casos, los puntos críticos y , en el caso del Teorema 3.2 es necesaria para poder aplicar

principios de comparación sin necesidad de pedir que $\nabla u \neq 0$. Por otro lado, las hipótesis de regularidad sobre las funciones f y u son necesarias también para poder aplicar principios de comparación en el caso de la demostración del Teorema 3.2. Además, que f sea no-creciente respecto de s es una hipótesis estándar en la teoría de soluciones viscosas y permite recuperar la noción de solución clásica cuando la función $u \in \mathcal{C}^2(\Omega)$.

3.1. Prueba del Teorema 3.1

Para demostrar el Teorema 3.1 proporcionamos algunos lemas que serán útiles.

Lema 3.1. Supongamos que $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ es acotada y semicontinua inferior en Ω . Sea $f = f(x, s, \eta)$ continua en $\Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ y no-creciente en s . Si u es una supersolución viscosa Feeble de (2.1) en Ω para $1 < p < \infty$, entonces, la inf-convolución u_ε es una supersolución viscosa Feeble de

$$-\Delta_p u_\varepsilon = f_\varepsilon(x, u_\varepsilon, \nabla u_\varepsilon)$$

en $\Omega_\varepsilon := \{x \in \Omega : \text{dist}(x, \partial\Omega) > r(\varepsilon)\}$, donde

$$f_\varepsilon(x, s, \eta) := \inf_{y \in B_{r(\varepsilon)}(x)} f(y, s, \eta).$$

Prueba. Consideremos primero la inf-convolución

$$u_\varepsilon(x) = \inf_{y \in B_{r(\varepsilon)}(x)} \left(u(y) + \frac{|y-x|^q}{q\varepsilon^{q-1}} \right), \quad x \in \Omega_\varepsilon.$$

Entonces, vemos que, haciendo $z = y - x$, podemos escribir u_ε de la siguiente manera

$$u_\varepsilon(x) = \inf_{z \in B_{r(\varepsilon)}(0)} \left(u(z+x) + \frac{|z|^q}{q\varepsilon^{q-1}} \right), \quad x \in \Omega_\varepsilon.$$

ya que, si $z \in B_{r(\varepsilon)}(0)$, entonces $y = z + x \in B_{r(\varepsilon)}(x)$. Recíprocamente, si $y \in B_{r(\varepsilon)}(x)$ entonces $z = y - x \in B_{r(\varepsilon)}(0)$.

Vamos a probar que para cada $z \in B_{r(\varepsilon)}(0)$, la siguiente función

$$\phi_z(x) := u(x+z) + \frac{|z|^q}{q\varepsilon^{q-1}}$$

es una supersolución viscosa Feeble de $-\Delta_p \phi_z = f_\varepsilon$ en Ω_ε . Veamos entonces que ϕ_z satisface la Definición 2.16. Sea $x_0 \in \Omega_\varepsilon$ y $\varphi \in \mathcal{C}^2(\Omega_\varepsilon)$ tal que

1. $\phi_z(x_0) = \varphi(x_0)$;
2. $\phi_z(x) > \varphi(x)$ para todo $x \neq x_0$ y
3. $\nabla \varphi(x_0) \neq 0$.

Llamemos

$$y := z + x$$

$$y_0 := z + x_0$$

y definamos

$$\tilde{\varphi}(y) := \varphi(y - z) - \frac{|z|^q}{q\varepsilon^{q-1}},$$

Entonces, como $\phi_z - \varphi$ alcanza un mínimo en x_0 y $\phi_z(x_0) = \varphi(x_0)$, vemos que, por un lado, si $y \neq y_0$

$$\begin{aligned} (u - \tilde{\varphi})(y) &= u(y) - \varphi(y - z) + \frac{|z|^q}{q\varepsilon^{q-1}} \\ &= u(z + x) + \frac{|z|^q}{q\varepsilon^{q-1}} - \varphi(x) \\ &= \phi_z(x) - \varphi(x) < 0 \end{aligned}$$

ya que, al ser $y \neq y_0$, $x \neq x_0$. Por otro lado,

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}(y_0) &= \varphi(y_0 - z) - \frac{|z|^q}{q\varepsilon^{q-1}} \\ &= \varphi(x_0) - \frac{|z|^q}{q\varepsilon^{q-1}} \\ &= \phi_z(x_0) - \frac{|z|^q}{q\varepsilon^{q-1}} \\ &= u(z + x_0) + \frac{|z|^q}{q\varepsilon^{q-1}} - \frac{|z|^q}{q\varepsilon^{q-1}} \\ &= u(y_0). \end{aligned}$$

Además, vemos que $\nabla \tilde{\varphi}(y_0) = \nabla \varphi(x_0) \neq 0$ (observemos que en $\nabla \tilde{\varphi}(y_0)$ las derivadas se calculan respecto de la variable y , mientras que en $\nabla \varphi(x_0)$ se calculan respecto de la variable x). Luego, como u es supersolución viscosa Feeble de (2.1), se tiene que

$$-\Delta_p(\tilde{\varphi}(y_0)) \geq f(y_0, \tilde{\varphi}(y_0), \nabla \tilde{\varphi}(y_0)).$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} -\Delta_p(\varphi(x_0)) &= -\Delta_p(\tilde{\varphi}(y_0)) \\ &\geq f(y_0, \tilde{\varphi}(y_0), \nabla \tilde{\varphi}(y_0)) \\ &= f(z + x_0, \tilde{\varphi}(z + x_0), \nabla \varphi(x_0)) \\ &= f\left(z + x_0, \varphi(x_0) - \frac{|z|^q}{q\varepsilon^{q-1}}, \nabla \varphi(x_0)\right) \\ &\geq f(z + x_0, \varphi(x_0), \nabla \varphi(x_0)) \\ &\geq f_\varepsilon(x_0, \varphi(x_0), \nabla \varphi(x_0)). \end{aligned} \tag{3.2}$$

Aquí hemos usado la hipótesis de que f es no-creciente en la segunda variable y también la definición de f_ε (notemos que, como $z \in B_{r(\varepsilon)}(0)$, $z + x_0 \in B_{r(\varepsilon)}(x_0)$).

Ahora sí, veamos que u_ε es supersolución viscosa Feeble de $-\Delta_p u_\varepsilon = f_\varepsilon(x, u_\varepsilon, \nabla u_\varepsilon)$ en Ω_ε . Sea $x_0 \in \Omega_\varepsilon$ y $\psi \in \mathcal{C}^2(\Omega_\varepsilon)$ tal que

1. $u_\varepsilon(x_0) = \psi(x_0)$;
2. $u_\varepsilon(x) > \psi(x)$ para todo $x \neq x_0$ y
3. $\nabla \psi(x_0) \neq 0$.

Entonces, por definición de ínfimo, para cada n , existe $z_n \in B_{r(\varepsilon)}(0)$ tal que

$$u(z_n + x_0) + \frac{|z_n|^q}{q\varepsilon^{q-1}} < u_\varepsilon(x_0) + \frac{1}{n}. \quad (3.3)$$

Como $\phi_{z_n} - \psi$ es continua y $\overline{B_{r(\varepsilon)}(x_0)} \subset \Omega_\varepsilon$ es compacto, $\phi_{z_n} - \psi$ alcanza un mínimo en $\overline{B_{r(\varepsilon)}(x_0)}$. Llamemos x_n al punto donde $\phi_{z_n} - \psi$ alcanza este mínimo. Entonces tenemos una sucesión de puntos x_n en $\overline{B_{r(\varepsilon)}(x_0)}$, tal que

$$u(z_n + x_n) + \frac{|z_n|^q}{q\varepsilon^{q-1}} - \psi(x_n) \leq u(z_n + x) + \frac{|z_n|^q}{q\varepsilon^{q-1}} - \psi(x)$$

para todo $x \in \overline{B_{r(\varepsilon)}(x_0)}$. Ahora bien, como $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión en un compacto, salvo una subsucesión $x_n \rightarrow y_0$ cuando $n \rightarrow \infty$. Más aún, por (3.3), vemos que

$$\begin{aligned} u_\varepsilon(x_n) - \psi(x_n) &\leq u(z_n + x_n) + \frac{|z_n|^q}{q\varepsilon^{q-1}} - \psi(x_n) \\ &\leq u(z_n + x_0) + \frac{|z_n|^q}{q\varepsilon^{q-1}} - \psi(x_0) \\ &\leq u_\varepsilon(x_0) + \frac{1}{n} - \psi(x_0). \end{aligned} \quad (3.4)$$

Luego, si tomamos límite inferior para $n \rightarrow \infty$ y usamos el hecho de que u_ε es semicontinua inferior, obtenemos

$$u_\varepsilon(y_0) - \psi(y_0) \leq u_\varepsilon(x_0) - \psi(x_0).$$

Ahora, nosotros sabemos que, por un lado, $u_\varepsilon(x_0) = \psi(x_0)$ y, por otro que $u(x) > \psi(x)$ para todo $x \neq x_0$, lo que significa que $u_\varepsilon - \psi$ alcanza un mínimo estricto en x_0 . Luego, debe ser $y_0 = x_0$. Ahora definamos la siguiente función

$$\varphi(x) := \psi(x) + (\phi_{z_n} - \psi)(x_n),$$

vemos que φ cumple

- I. $\varphi(x_n) = \psi(x_n) + (\phi_{z_n} - \psi)(x_n) = \phi_{z_n}(x_n)$,
- II. si $x \in B_{r(\varepsilon)}(x_0)$, $(\phi_{z_n} - \varphi)(x) = (\phi_{z_n} - \psi)(x) - (\phi_{z_n} - \psi)(x_n) > 0$ ya que $(\phi_{z_n} - \psi)$ alcanza un mínimo en x_n .

III. $\nabla\varphi(x_n) = \nabla\psi(x_n) \neq 0$ para n suficientemente grande pues $\nabla\psi(x_0) \neq 0$, $\psi \in \mathcal{C}^2(\Omega_\varepsilon)$ y $x_n \rightarrow x_0$.

Por lo tanto, φ resulta ser una función test para ϕ_{z_n} en el punto x_n y, como ϕ_{z_n} es supersolución viscosa Feeble de $-\Delta_p\phi_{z_n} = f_\varepsilon$ en Ω_ε , reemplazando en (3.2) y llamando $y_n = z_n + x_n$ obtenemos

$$\begin{aligned}
-\Delta_p(\psi(x_n)) &= -\Delta_p(\varphi(x_n)) \\
&= -\Delta_p(\tilde{\varphi}(y_n)) \\
&\geq f(y_n, \tilde{\varphi}(y_n), \nabla\tilde{\varphi}(y_n)) \\
&= f(z_n + x_n, \varphi(x_n) - \frac{|z_n|^q}{q\varepsilon^{q-1}}, \nabla\varphi(x_n)) \\
&\geq f(z_n + x_n, \varphi(x_n), \nabla\varphi(x_n)) \\
&= f(z_n + x_n, \psi(x_n) + (\phi_{z_n} - \psi)(x_n), \nabla\varphi(x_n)) \\
&= f(z_n + x_n, \phi_{z_n}(x_n), \nabla\varphi(x_n)) \\
&= f(z_n + x_n, u(z_n + x_n) + \frac{|z_n|^q}{q\varepsilon^{q-1}}, \nabla\psi(x_n))
\end{aligned}$$

Ahora bien, en (3.4) obtuvimos la siguiente desigualdad

$$u(z_n + x_n) + \frac{|z_n|^q}{q\varepsilon^{q-1}} - \psi(x_n) \leq u_\varepsilon(x_0) + \frac{1}{n} - \psi(x_0).$$

Entonces, como f es no-creciente respecto de la segunda variable, se tiene que

$$-\Delta_p(\psi(x_n)) \geq f\left(z_n + x_n, u_\varepsilon(x_0) + \frac{1}{n} - \psi(x_0) + \psi(x_n), \nabla\psi(x_n)\right).$$

Luego, si hacemos $n \rightarrow \infty$, obtenemos

$$-\Delta_p(\psi(x_0)) \geq f(z' + x_0, u_\varepsilon(x_0), \nabla\psi(x_0)),$$

para algún $z' \in \overline{B}_{r(\varepsilon)}(0)$. Por lo tanto, por la definición de f_ε y ya que $u_\varepsilon(x_0) = \psi(x_0)$,

$$-\Delta_p(\psi(x_0)) \geq f_\varepsilon(x_0, \psi(x_0), \nabla\psi(x_0)),$$

Y así obtenemos que u_ε es una supersolución viscosa Feeble de

$$-\Delta_p u_\varepsilon = f_\varepsilon(x, u_\varepsilon, \nabla u_\varepsilon) \text{ en } \Omega_\varepsilon.$$

■

El siguiente lema establece que los términos f_ε , en el caso de las inf-convoluciones, convergen débilmente (ver Lema 2.2 de [16]). Exponemos la demostración para mayor completitud.

Lema 3.2. Sea $f = f(x, s, \eta)$ una función uniformemente continua en $\Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, Lipschitz respecto de la variable η y que satisface la condición de crecimiento (3.1). Sea $u \in W_{loc}^{1,p}(\Omega)$ localmente acotada y semicontinua inferior en Ω . Para cada $\varepsilon > 0$, se define u_ε como en (2.10) y f_ε como en el Lema 3.1. Entonces, si ∇u_ε converge a ∇u en $L_{loc}^p(\Omega)$, entonces se cumple

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} f_\varepsilon(x, u_\varepsilon, \nabla u_\varepsilon) \psi dx = \int_{\Omega} f(x, u, \nabla u) \psi dx$$

para toda función no-negativa $\psi \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$.

Prueba. Sea $\psi \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$. Llamemos $K := \text{spt}(\psi)$. Tomemos $\varepsilon > 0$ de manera tal que $K \subset K' \subset \Omega$, donde definimos K' como $K' := \bigcup_{x \in K} B_{r(\varepsilon)}(x)$. Como f es uniformemente continua en $K' \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, para cada $\rho > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$|f(x, u_\varepsilon(x), \nabla u_\varepsilon(x)) - f(y, u_\varepsilon(x), \nabla u_\varepsilon(x))| < \rho \quad \text{si } |x - y| < \delta, \quad x, y \in K'. \quad (3.5)$$

Como $r(\varepsilon) \rightarrow 0$ cuando $\varepsilon \rightarrow 0$, existe un $\varepsilon_0 > 0$ tal que, si $\varepsilon < \varepsilon_0$, entonces $r(\varepsilon) < \delta$. Entonces, por (3.5)

$$f(x, u_\varepsilon(x), \nabla u_\varepsilon(x)) < \rho + f(y, u_\varepsilon(x), \nabla u_\varepsilon(x)),$$

para cada $x \in K$ y cada $y \in B_{r(\varepsilon)}(x)$, pues si $x \in K$ e $y \in B_{r(\varepsilon)}(x)$, $|x - y| < r(\varepsilon) < \delta$ para $\varepsilon < \varepsilon_0$. Entonces,

$$f(x, u_\varepsilon(x), \nabla u_\varepsilon(x)) < \rho + f_\varepsilon(x, u_\varepsilon(x), \nabla u_\varepsilon(x)).$$

Luego,

$$0 \leq f(x, u_\varepsilon(x), \nabla u_\varepsilon(x)) - f_\varepsilon(x, u_\varepsilon(x), \nabla u_\varepsilon(x)) < \rho \quad (3.6)$$

ya que $f(x, u_\varepsilon(x), \nabla u_\varepsilon(x)) \geq f_\varepsilon(x, u_\varepsilon(x), \nabla u_\varepsilon(x))$. Así, aplicando (3.6) y usando el hecho de que $\psi \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$, obtenemos

$$\int_{\Omega} |f(x, u_\varepsilon, \nabla u_\varepsilon) - f_\varepsilon(x, u_\varepsilon, \nabla u_\varepsilon)| \psi dx \leq \rho \|\psi\|_{L^\infty(K)} m(K) \quad (3.7)$$

donde $m(K)$ denota la medida del compacto K . Ahora bien, usando la hipótesis de que f es continua, que u_ε converge puntualmente a u y que ∇u_ε converge a ∇u en $L_{loc}^p(\Omega)$, se tiene que

$$f(x, u_\varepsilon(x), \nabla u_\varepsilon(x)) \rightarrow f(x, u(x), \nabla u(x))$$

en casi todo punto en Ω . Ahora, como u_ε es una sucesión creciente, obtenemos que, para cada $\varepsilon \leq \varepsilon_0$,

$$u_{\varepsilon_0} \leq u_\varepsilon \leq u.$$

Luego, como u_{ε_0} y u están localmente acotadas en Ω , entonces están acotadas en el compacto K . Por lo tanto, existe una constante $C_1 > 0$ tal que, para todo $\varepsilon \leq \varepsilon_0$,

$$\|u_\varepsilon\|_{L^\infty(K)} \leq C_1.$$

Así, por la condición de crecimiento de f , la continuidad de γ y el hecho de que las funciones u_ε están uniformemente acotadas, existe una constante $C_2 > 0$ tal que

$$|f(x, u_\varepsilon(x), \nabla u(x))| \leq \gamma(|u_\varepsilon|)|\nabla u|^{p-1} + \phi(x) \leq C_2|\nabla u|^{p-1} + \phi(x). \quad (3.8)$$

Luego, por el Teorema de Convergencia Dominada se obtiene

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} f(x, u_\varepsilon, \nabla u) \psi \, dx = \int_{\Omega} f(x, u, \nabla u) \psi \, dx. \quad (3.9)$$

Por otro lado, como f es Lipschitz respecto de la variable η ,

$$\int_{\Omega} |f(x, u_\varepsilon, \nabla u_\varepsilon) - f(x, u_\varepsilon, \nabla u)| \psi \, dx \leq M \max_K \psi \int_K |\nabla u_\varepsilon - \nabla u| \, dx \quad (3.10)$$

donde M es la constante Lipschitz de f . Ahora bien, por hipótesis $\nabla u_\varepsilon \rightarrow \nabla u$ en $L^p_{loc}(\Omega)$, por lo tanto la última integral en (3.10) tiende a 0 cuando $\varepsilon \rightarrow 0$. Luego,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |f(x, u_\varepsilon, \nabla u_\varepsilon) - f(x, u, \nabla u)| \psi \, dx &\leq \int_{\Omega} |f(x, u_\varepsilon, \nabla u_\varepsilon) - f(x, u_\varepsilon, \nabla u)| \psi \, dx \\ &\quad + \int_{\Omega} |f(x, u_\varepsilon, \nabla u) - f(x, u, \nabla u)| \psi \, dx \\ &= I_1 + I_2. \end{aligned} \quad (3.11)$$

y, por (3.9) y (3.10), ambas integrales I_1 e I_2 tienden a 0 cuando $\varepsilon \rightarrow 0$. Finalmente, aplicando las desigualdades (3.7) y (3.11),

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Omega} f_\varepsilon(x, u_\varepsilon, \nabla u_\varepsilon) \psi \, dx - \int_K f(x, u, \nabla u) \psi \, dx \right| &\leq \int_K |f_\varepsilon(x, u_\varepsilon, \nabla u_\varepsilon) - f(x, u, \nabla u)| \psi \, dx \\ &\leq \int_K |f_\varepsilon(x, u_\varepsilon, \nabla u_\varepsilon) - f(x, u_\varepsilon, \nabla u_\varepsilon)| \psi \, dx \\ &\quad + \int_K |f(x, u_\varepsilon, \nabla u_\varepsilon) - f(x, u, \nabla u)| \psi \, dx \\ &\leq \rho \|\psi\|_{L^\infty(K)} |K| + I_1 + I_2. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Así, haciendo $\varepsilon \rightarrow 0$ en (3.12) vemos que

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left| \int_K f_\varepsilon(x, u_\varepsilon, \nabla u_\varepsilon) \psi \, dx - \int_K f(x, u, \nabla u) \psi \, dx \right| \leq \rho \|\psi\|_{L^\infty(K)} |K|$$

para cada $\rho > 0$. Por lo tanto

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_K f_\varepsilon(x, u_\varepsilon, \nabla u_\varepsilon) \psi \, dx = \int_K f(x, u, \nabla u) \psi \, dx.$$

como deseábamos. ■

3.1.1. Estimación de Caccioppoli

En el siguiente lema damos una estimación para la norma L_{loc}^p del gradiente de supersoluciones débiles. Al igual que el Lema 3.2, la demostración de esta desigualdad se encuentra en [16] y la exponemos para conveniencia del lector.

Lema 3.3. (Estimación de Caccioppoli) Sea $u \in W^{1,p}(\Omega)$ una supersolución débil de (2.1) localmente acotada. Supongamos que f es continua en $\Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ y que satisface la cota de crecimiento (3.1). Entonces existe una constante $C = C(p, \Omega, \phi, \gamma) > 0$ tal que, para toda función test $\xi \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$, $0 \leq \xi \leq 1$, se cumple

$$\int_{\Omega} |\nabla u|^p \xi^p dx \leq C \left[(\text{osc}_K u)^p \int_{\Omega} (|\nabla \xi|^p + 1) dx + \text{osc}_K u \right],$$

donde $\text{osc}_K u := \sup_K u - \inf_K u$ y $K := \text{spt}(\xi)$.

Prueba. Sea $\xi \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ y llamemos K al soporte de ξ . Definimos la siguiente función

$$\psi(x) := \left(\sup_K u - u(x) \right) \xi^p(x),$$

para cada $x \in \Omega$. Entonces, como por hipótesis u es supersolución débil de (2.1), se cumple

$$\int_{\Omega} |\nabla u|^{p-2} \nabla u \cdot \nabla \psi dx \geq \int_{\Omega} f(x, u, \nabla u) \psi dx \quad (3.13)$$

Luego, si desarrollamos $\nabla \psi$ en (3.13) obtenemos

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} f(x, u, \nabla u) \psi dx &\leq \int_{\Omega} |\nabla u|^{p-2} \nabla u \cdot \nabla \psi dx \\ &= \int_{\Omega} |\nabla u|^{p-2} \nabla u \cdot [\nabla (\sup_K u - u) \xi^p + (\sup_K u - u) p \xi^{p-1} \nabla \xi] dx \\ &= - \int_{\Omega} |\nabla u|^{p-2} \nabla u \cdot \xi^p \nabla u + |\nabla u|^{p-2} \nabla u \cdot (\sup_K u - u) p \xi^{p-1} \nabla \xi dx \\ &= - \int_{\Omega} |\nabla u|^{p-2} \nabla u \cdot \left[\xi^p \nabla u - p \xi^{p-1} \nabla \xi \left(\sup_K u - u \right) \right] dx. \end{aligned}$$

Así, vemos que

$$\int_{\Omega} |\nabla u|^p \xi^p dx \leq p \int_{\Omega} \xi^{p-1} |\nabla u|^{p-2} \nabla u \cdot \nabla \xi \left(\sup_K u - u \right) dx - \int_{\Omega} f(x, u, \nabla u) \psi dx. \quad (3.14)$$

Ahora bien, se tiene que

$$\int_{\Omega} ||\nabla u|^{p-2} \nabla u| dx = \int_{\Omega} |\nabla u|^{p-1} dx,$$

Lo que significa que $|\nabla u|^{p-2} \nabla u \in L^{p/(p-1)}(\Omega)$.

Consideremos ahora la siguiente desigualdad de Young

$$ab \leq \delta a^q + \delta^{-1/(q-1)} b^{q'},$$

con q y q' exponentes conjugados, es decir, $\frac{1}{q} + \frac{1}{q'} = 1$. Entonces, poniendo

$$a = \xi^{p-1} |\nabla u|^{p-1},$$

$$b = p |\nabla \xi| \left(\sup_K u - u \right) \text{ y}$$

$$q = \frac{p}{p-1} \text{ y } q' = p$$

vemos, por la desigualdad de Young, que

$$p \int_{\Omega} \xi^{p-1} |\nabla u|^{p-2} \nabla u \cdot \nabla \xi \left(\sup_K u - u \right) dx \leq \delta \int_{\Omega} |\nabla u|^p \xi^p + \delta^{1-p} \int_{\Omega} p^p |\nabla \xi|^p (\text{osc}_K u)^p dx.$$

Por otro lado, por la condición de crecimiento de f , se cumple, para cada $x \in \text{spt}(\xi)$

$$\begin{aligned} f(x, u(x), \nabla u(x)) &\geq -\gamma(|u(x)|) |\nabla u(x)|^{p-1} - \phi(x) \\ &\geq -\gamma_{\infty} |\nabla u(x)|^{p-1} - \|\phi\|_{L^{\infty}(K)}, \end{aligned} \quad (3.15)$$

siendo $\gamma_{\infty} := \sup_{x \in K} |\gamma(u(x))|$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} - \int_{\Omega} f(x, u, \nabla u) \psi dx &\leq \gamma_{\infty} \int_{\Omega} |\nabla u|^{p-1} \left(\sup_K u - u \right) \xi^p dx + \|\phi\|_{L^{\infty}(K)} \int_{\Omega} \left(\sup_K u - u \right) \xi^p dx \\ &\leq \gamma_{\infty} \int_{\Omega} |\nabla u|^{p-1} \left(\sup_K u - u \right) \xi^p dx + \|\phi\|_{L^{\infty}(K)} \int_{\Omega} \text{osc}_K u \xi^p dx \\ &\leq \gamma_{\infty} \int_{\Omega} |\nabla u|^{p-1} \left(\sup_K u - u \right) \xi^p dx + C_1 \text{osc}_K u, \end{aligned}$$

donde $C_1 = C_1(\Omega, \phi)$ es una constante positiva y hemos usado el hecho de que $(\sup_K u - u) \leq \text{osc}_K u$ y que $\xi \leq 1$. Ahora bien, como $\xi \leq 1$, se tiene que

$$\begin{aligned} \gamma_{\infty} \int_{\Omega} |\nabla u|^{p-1} \left(\sup_K u - u \right) \xi^p dx &\leq \gamma_{\infty} \int_{\Omega} |\nabla u|^{p-1} \left(\sup_K u - u \right) \xi^{p-1} dx \\ &\leq \gamma_{\infty} \int_{\Omega} |\nabla u|^{p-1} \text{osc}_K u \xi^{p-1} dx. \end{aligned}$$

Luego, aplicando nuevamente la desigualdad de Young con

$$a = |\nabla u|^{p-1} \xi^{p-1},$$

$$b = \gamma_{\infty} \text{osc}_K u \text{ y}$$

$$q = \frac{p}{p-1}, \quad q' = p,$$

obtenemos

$$\gamma_\infty \int_\Omega |\nabla u|^{p-1} \text{osc}_K u \xi^{p-1} dx \leq \delta \int_\Omega |\nabla u|^p \xi^p dx + \delta^{1-p} C_2 (\text{osc}_K u)^p.$$

con $C_2 = C_2(p, \Omega, \gamma)$. Finalmente,

$$\begin{aligned} \int_\Omega |\nabla u|^p \xi^p dx &\leq p \int_\Omega \xi^{p-1} |\nabla u|^{p-2} \nabla u \cdot \nabla \xi \left(\sup_K u - u \right) dx - \int_\Omega f(x, u, \nabla u) \psi dx \\ &\leq \delta \int_\Omega |\nabla u|^p \xi^p + \delta^{1-p} \int_\Omega p^p |\nabla \xi|^p (\text{osc}_K u)^p dx \\ &\quad + \gamma_\infty \int_\Omega |\nabla u|^{p-1} \left(\sup_K u - u \right) \xi^p dx + C_1 \text{osc}_K u \\ &\leq \delta \int_\Omega |\nabla u|^p \xi^p + \delta^{1-p} \int_\Omega p^p |\nabla \xi|^p (\text{osc}_K u)^p dx + \delta \int_\Omega |\nabla u|^p \xi^p dx \\ &\quad + \delta^{1-p} C_2 (\text{osc}_K u)^p + C_1 \text{osc}_K u \\ &= 2\delta \int_\Omega |\nabla u|^p \xi^p dx + \delta^{1-p} C(p, \Omega, \gamma, \phi) \left[(\text{osc}_K u)^p \int_\Omega (|\nabla \xi|^p + 1) dx + \text{osc}_K u \right] \end{aligned}$$

Luego, si tomamos $\delta < 1/2$, obtenemos lo deseado. ■

Ahora sí estamos en condiciones de probar el Teorema 3.1.

Observación 3.1. La demostración del Teorema 3.1 para el caso degenerado ($p \geq 2$) es idéntica a la de Medina y Ochoa en [16] ya que ambas definiciones de solución viscosa coinciden en este rango. Esto es así porque, por un lado, toda solución viscosa es una solución Feeble (ver Proposición 3.1) para cualquier valor de p y, por otro lado, para $p \geq 2$ se cumple que toda solución viscosa Feeble es una solución ordinaria (es decir, sin ningún requisito en el gradiente de las funciones test) siempre que $f(x, s, 0) = 0$ para cada $x \in \Omega$ y $s \in \mathbb{R}$. Este último resultado se encuentra en el Teorema 4.2 de [11]. Ahora bien, como toda solución viscosa ordinaria resulta ser una solución viscosa en el sentido de la Definición 2.17, obtenemos la equivalencia entre soluciones viscosas y viscosas Feeble en el rango $p \geq 2$.

Para el caso singular ($1 < p < 2$), sí hemos hecho modificaciones en la demostración de [16], simplificándola a través de la incorporación de otra hipótesis sobre la función f y la definición de solución viscosa empleada. Para conveniencia del lector, exponemos la demostración del Teorema 3.1 para todos los valores de p .

Prueba del Teorema 3.1.

1. Caso degenerado ($p \geq 2$)

Consideremos la inf-convolución u_ε con $q = 2$, es decir,

$$u_\varepsilon(x) = \inf_{y \in B_r(\varepsilon)(x)} \left(u(y) + \frac{|x - y|^2}{2\varepsilon^{q-1}} \right).$$

Entonces, como u_ε es semicóncava, por la Proposición 2.3, la función

$$\phi(x) := u_\varepsilon(x) - C|x|^2$$

(podemos tomar $C = \frac{1}{2\varepsilon}$) es cóncava en $\Omega_{r(\varepsilon)}$. Así, por el Teorema 2.11 (Teorema de Aleksandrov), ϕ es dos veces diferenciable en casi todo punto en $\Omega_{r(\varepsilon)}$, y así u_ε también. Por otro lado, por el Lema 3.1, u_ε resulta ser una supersolución viscosa Feeble de $-\Delta_p u_\varepsilon = f_\varepsilon$ en Ω_ε . Veamos entonces que

$$-\Delta_p u_\varepsilon(x) \geq f_\varepsilon(x, u_\varepsilon(x), \nabla u_\varepsilon(x)) \quad (3.16)$$

para casi todo punto de $\Omega_{r(\varepsilon)}$. Sabemos que u_ε es dos veces diferenciable en casi todo punto en Ω_ε , esto significa que u_ε es dos veces diferenciable en $\Omega_\varepsilon \setminus A$ donde A es un conjunto de medida nula. Sea $x_0 \in \Omega_\varepsilon \setminus A$. Entonces

$$u_\varepsilon(x) = u_\varepsilon(x_0) + \nabla u_\varepsilon(x_0) \cdot (x - x_0) + \frac{1}{2}(\nabla^2 u_\varepsilon(x_0)(x - x_0)) \cdot (x - x_0) + o(|x - x_0|^2).$$

Sea

$$\varphi(x) = u_\varepsilon(x_0) + \nabla u_\varepsilon(x_0) \cdot (x - x_0) + \frac{1}{2}(\nabla^2 u_\varepsilon(x_0)(x - x_0)) \cdot (x - x_0),$$

y definamos

$$\tilde{\varphi}(x) = \varphi(x) - C|x - x_0|^2.$$

donde C es una constante positiva tal que

$$\frac{|o(|x - x_0|^2)|}{|x - x_0|^2} < C$$

para todo x suficientemente cercano a x_0 , distinto de x_0 . Así

$$o(|x - x_0|^2) > -C|x - x_0|^2$$

para todo $x \neq x_0$ cercano a x_0 . Entonces vemos que $\tilde{\varphi}$ satisface

1. $\tilde{\varphi}(x_0) = \varphi(x_0) = u_\varepsilon(x_0)$,
2. $\tilde{\varphi}(x) < u_\varepsilon(x)$ para cada $x \neq x_0$ cercano a x_0 .

Entonces, vemos que $\tilde{\varphi}$ es una función test para u_ε en el punto x_0 y en el caso de la noción de supersolución viscosa ordinaria. Ahora bien, como por hipótesis $f(x, s, 0) = 0$ para cada $x \in \Omega$ y $s \in \mathbb{R}$, las nociones de solución viscosa y solución viscosa Feeble, resultan ser equivalentes. Por lo tanto, como u_ε es supersolución viscosa Feeble de $-\Delta_p u_\varepsilon = f_\varepsilon$, es entonces supersolución viscosa ordinaria de esta misma ecuación y, así

$$-\Delta_p \tilde{\varphi}(x_0) \geq f_\varepsilon(x_0, u_\varepsilon(x_0), \nabla \tilde{\varphi}(x_0)).$$

Pero $\nabla \tilde{\varphi}(x_0) = \nabla u_\varepsilon(x_0)$ y $-\Delta_p \tilde{\varphi}(x_0) = -\Delta_p u_\varepsilon(x_0)$. Por lo tanto,

$$-\Delta_p u_\varepsilon(x_0) \geq f_\varepsilon(x_0, u_\varepsilon(x_0), \nabla u_\varepsilon(x_0)).$$

Y, como el punto x_0 que tomamos en $\Omega_\varepsilon \setminus A$ fue arbitrario, obtenemos la validez de la desigualdad (3.16) en casi todo punto de Ω_ε .

Ahora, en el Teorema 3.1 de [9], Julin y Juutinen prueban que

$$\int_{\Omega} |\nabla u_\varepsilon|^{p-2} \nabla u_\varepsilon \cdot \nabla \psi \geq \int_{\Omega} (-\Delta_p u_\varepsilon) \psi \quad (3.17)$$

para toda función test no-negativa ψ . Para mayor completitud, exponemos la prueba.

Sea $\psi \in C_0^\infty(\Omega)$ una función no-negativa. Como el soporte de ψ es compacto, $\text{spt} \psi \subset \Omega_{r(\varepsilon)}$ para ε pequeño. Sea ϕ_j una sucesión de funciones cóncavas suaves que converge a ϕ , obtenida via regularización estándar, y sea $u_{\varepsilon,j} = \phi_j + \frac{1}{2\varepsilon}|x|^2$. Integrando por partes obtenemos

$$\int_{\Omega} |\nabla u_{\varepsilon,j}|^{p-2} \nabla u_{\varepsilon,j} \cdot \nabla \psi \, dx = \int_{\Omega} (-\Delta_p u_{\varepsilon,j}) \psi \, dx. \quad (3.18)$$

Como u_ε es localmente Lipschitz continua, tenemos

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \int_{\Omega} |\nabla u_{\varepsilon,j}|^{p-2} \nabla u_{\varepsilon,j} \cdot \nabla \psi \, dx = \int_{\Omega} |\nabla u_\varepsilon|^{p-2} \nabla u_\varepsilon \cdot \nabla \psi \, dx. \quad (3.19)$$

Por otro lado, vemos que $\nabla^2 u_{\varepsilon,j} = \nabla^2 \phi_j + \frac{1}{\varepsilon} I \leq \frac{1}{\varepsilon} I$ ya que las funciones ϕ_j son cóncavas. Además, $\nabla u_{\varepsilon,j}$ es localmente acotado en j , por lo tanto $|\nabla u_{\varepsilon,j}|$ está acotado en $\text{spt}(\psi)$ por una constante, llamémosla C_ε . Entonces, en el soporte de ψ se cumple

$$\begin{aligned} -\Delta_p u_{\varepsilon,j} &= -|\nabla u_{\varepsilon,j}|^{p-2} \text{tr}(\nabla^2 u_{\varepsilon,j}) - |\nabla u_{\varepsilon,j}|^{p-4} (p-2) (\nabla^2 u_{\varepsilon,j} \nabla u_{\varepsilon,j}) \cdot \nabla u_{\varepsilon,j} \\ &\geq -C_\varepsilon^{p-2} \text{tr}\left(\frac{1}{\varepsilon} I\right) - |\nabla u_{\varepsilon,j}|^{p-4} (p-2) \left(\frac{1}{\varepsilon} \nabla u_{\varepsilon,j}\right) \cdot \nabla u_{\varepsilon,j} \\ &\geq -\frac{1}{\varepsilon} C_\varepsilon^{p-2} n - \frac{1}{\varepsilon} C_\varepsilon^{p-2} (p-2) \\ &= -\frac{C_\varepsilon^{p-2} (n+p-2)}{\varepsilon}. \end{aligned}$$

Luego, aplicando el lema de Fatou,

$$\liminf_{j \rightarrow \infty} \int_{\Omega} (-\Delta_p u_{\varepsilon,j}) \psi \, dx \geq \int_{\Omega} \liminf_{j \rightarrow \infty} (-\Delta_p u_{\varepsilon,j}) \psi \, dx. \quad (3.20)$$

Por otro lado, se prueba en [4], que $\nabla^2 \phi_j(x) \rightarrow \nabla^2 \phi(x)$ para casi todo punto x , y así

$$\liminf_{j \rightarrow \infty} (-\Delta_p u_{\varepsilon,j}(x)) = -\Delta_p u_\varepsilon(x) \quad (3.21)$$

para casi todo punto x . Luego, juntando (3.18), (3.19), (3.20) y (3.21) obtenemos lo que deseamos

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} |\nabla u_{\varepsilon}|^{p-2} \nabla u_{\varepsilon} \cdot \nabla \psi \, dx &= \lim_{j \rightarrow \infty} \int_{\Omega} |\nabla u_{\varepsilon, j}|^{p-2} \nabla u_{\varepsilon, j} \cdot \nabla \psi \, dx \\
&= \lim_{j \rightarrow \infty} \int_{\Omega} (-\Delta_p u_{\varepsilon, j}) \psi \, dx \\
&\geq \int_{\Omega} \liminf_{j \rightarrow \infty} (-\Delta_p u_{\varepsilon, j}) \psi \, dx \\
&= \int_{\Omega} (-\Delta_p u_{\varepsilon}) \psi \, dx.
\end{aligned} \tag{3.22}$$

Así hemos probado (3.17). Luego, por (3.16) y (3.17) tenemos

$$\int_{\Omega} f_{\varepsilon}(x, u_{\varepsilon}, \nabla u_{\varepsilon}) \psi \, dx \leq \int_{\Omega} |\nabla u_{\varepsilon}|^{p-2} \nabla u_{\varepsilon} \cdot \nabla \psi \, dx,$$

para toda función test no-negativa ψ y para todo $\varepsilon > 0$. Esto significa que u_{ε} es supersolución débil de $-\Delta_p u_{\varepsilon} = f_{\varepsilon}$ en Ω . Veremos entonces que, cuando $\varepsilon \rightarrow 0$, se cumple

$$\int_{\Omega} f(x, u, \nabla u) \psi \, dx \leq \int_{\Omega} |\nabla u|^{p-2} \nabla u \cdot \nabla \psi \, dx.$$

Para probar esta afirmación, primero observemos que, empleando la estimación de Caccioppoli podemos probar que

$$|\nabla u_{\varepsilon}|^{p-2} \nabla u_{\varepsilon}$$

converge débilmente en $L_{loc}^{p/(p-1)}(\Omega)$. En efecto, sea $K \subset \Omega$ compacto y sea $U \subset \Omega$ conjunto abierto que contenga a K . Tomemos una función test no-negativa $0 \leq \xi \leq 1$ de forma tal que

$$K \subset K' := \text{spt } \xi \subset U,$$

y $\xi = 1$ en K . Entonces

$$\begin{aligned}
\int_K ||\nabla u_{\varepsilon}|^{p-2} \nabla u_{\varepsilon}|^{p/(p-1)} \, dx &= \int_K |\nabla u_{\varepsilon}|^p \, dx \\
&= \int_K |\nabla u_{\varepsilon}|^p \xi^p \, dx \\
&\leq \int_{\Omega} |\nabla u_{\varepsilon}|^p \xi^p \, dx.
\end{aligned} \tag{3.23}$$

donde hemos usado que $\xi = 1$ en K . Por otro lado, vemos que f_{ε} satisface la condición de crecimiento ya que, si $x \in K'$ y tomamos $y \in B_{r(\varepsilon)}(x)$, entonces, por la condición de crecimiento de f tenemos que

$$f(y, u_{\varepsilon}(x), \nabla u_{\varepsilon}(x)) \geq -\gamma_{\infty} |\nabla u_{\varepsilon}(x)|^{p-1} - \|\phi\|_{L^{\infty}(K')}$$

donde $\gamma_{\infty} = \sup_{K'} \gamma(|u_{\varepsilon}|)$. Entonces, como la última desigualdad vale para cualquier $y \in B_{r(\varepsilon)}(x)$,

$$f_{\varepsilon}(x, u_{\varepsilon}(x), \nabla u_{\varepsilon}(x)) \geq -\gamma_{\infty} |\nabla u_{\varepsilon}(x)|^{p-1} - \|\phi\|_{L^{\infty}(K')}.$$

Además, por ser f_ε el ínfimo se cumple

$$f_\varepsilon(x, u_\varepsilon(x), \nabla u_\varepsilon(x)) \leq f(x, u_\varepsilon(x), \nabla u_\varepsilon(x)) \leq \gamma_\infty |\nabla u_\varepsilon(x)|^{p-1} + \|\phi\|_{L^\infty(K')}.$$

Entonces podemos aplicar la estimación de Caccioppoli para u_ε y f_ε , ya que u_ε es super-solución débil de $-\Delta_p u_\varepsilon = f_\varepsilon$ en Ω y f_ε satisface la desigualdad (3.15). Por lo tanto

$$\int_\Omega |\nabla u_\varepsilon|^p \xi^p dx \leq C \left[(\text{osc}_{K'} u_\varepsilon)^p \int_\Omega (|\nabla \xi|^p + 1) dx + \text{osc}_{K'} u_\varepsilon \right]. \quad (3.24)$$

Por otro lado, como u_ε es una sucesión creciente que converge puntualmente a u en Ω , tenemos

$$\text{osc}_{K'} u_\varepsilon \leq \sup_{K'} u - \inf_{K'} u_{\varepsilon_0},$$

para todo $\varepsilon < \varepsilon_0$. Luego, por (3.23), (3.24) hemos conseguido acotar uniformemente, para cada compacto K , las siguientes integrales

$$\int_K \left| |\nabla u_\varepsilon|^{p-2} \nabla u_\varepsilon \right|^{p/(p-1)} dx, \quad \int_K |\nabla u_\varepsilon|^p dx.$$

Así, por el Teorema 2.8 (Teorema de representación de Riesz) y la Proposición 2.1 sobre convergencia débil, obtenemos que $|\nabla u_\varepsilon|^{p-2} \nabla u_\varepsilon$ converge débilmente en $L_{loc}^{p/(p-1)}(\Omega)$, y ∇u_ε converge débilmente en $L_{loc}^p(\Omega)$ (observemos que $\frac{p}{p-1}$ es el exponente conjugado de p). Por otro lado, vemos que $u_\varepsilon \xi \in W_0^{1,p}(\Omega_\varepsilon)$, por lo tanto, por la desigualdad de Poincaré se tiene que

$$\|u_\varepsilon\|_{W^{1,p}(K)} = \|u_\varepsilon \xi\|_{W^{1,p}(K)} \leq \|\nabla u_\varepsilon\|_{L^p(K')}$$

donde K' es un conjunto compacto que contiene al soporte de ξ . Lo que significa que u_ε está uniformemente acotada en $W_{loc}^{1,p}(\Omega)$. Entonces, por el Teorema 2.2, u_ε tiene una subsucesión que converge débilmente a una función $v \in W_{loc}^{1,p}(\Omega)$. Pero, entonces u_ε converge en casi todo punto a v , y como u_ε converge puntualmente a u , debe ser $u = v$. Por lo tanto $u \in W_{loc}^{1,p}(\Omega)$ y u_ε converge débilmente a u en $W_{loc}^{1,p}(\Omega)$.

Veamos ahora que ∇u_ε converge fuertemente a ∇u en $L_{loc}^p(\Omega)$. Sea

$$\varphi(x) := (u(x) - u_\varepsilon(x)) \theta(x), \quad x \in \Omega,$$

donde $\theta \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$. Entonces

$$\int_\Omega |\nabla u_\varepsilon|^{p-2} \nabla u_\varepsilon \cdot \nabla \varphi dx \geq \int_\Omega f_\varepsilon(x, u_\varepsilon, \nabla u_\varepsilon) \varphi dx.$$

Si ahora invertimos la desigualdad y sumamos y restamos a ambos lados $\int_\Omega |\nabla u|^{p-2} \nabla u \cdot \nabla \varphi$, obtenemos

$$\begin{aligned} & \int_\Omega \left[|\nabla u|^{p-2} \nabla u - |\nabla u_\varepsilon|^{p-2} \nabla u_\varepsilon \right] \cdot \nabla (u - u_\varepsilon) \theta dx \\ & \leq - \int_\Omega f_\varepsilon(x, u_\varepsilon, \nabla u_\varepsilon) \varphi dx + \int_\Omega |\nabla u|^{p-2} \nabla u \cdot \nabla (u - u_\varepsilon) \theta dx. \end{aligned} \quad (3.25)$$

Ahora bien por la convergencia débil de u_ε a u en $W_{loc}^{1,p}(\Omega)$,

$$\int_{\Omega} |\nabla u|^{p-2} \nabla u \cdot \nabla (u - u_\varepsilon) \theta \, dx \rightarrow 0$$

cuando $\varepsilon \rightarrow 0$. Por otro lado, el lado izquierdo de (3.25) está dado por

$$\int_{\Omega} \theta [|\nabla u|^{p-2} \nabla u - |\nabla u_\varepsilon|^{p-2} \nabla u_\varepsilon] \cdot \nabla (u - u_\varepsilon) \, dx + \int_{\Omega} (u - u_\varepsilon) [|\nabla u|^{p-2} \nabla u - |\nabla u_\varepsilon|^{p-2} \nabla u_\varepsilon] \cdot \nabla \theta \, dx. \quad (3.26)$$

La segunda integral en (3.26) podemos acotarla de la siguiente manera

$$\begin{aligned} & \left| \int_{\Omega} (u - u_\varepsilon) [|\nabla u|^{p-2} \nabla u - |\nabla u_\varepsilon|^{p-2} \nabla u_\varepsilon] \cdot \nabla \theta \right| \\ & \leq \|\nabla \theta\|_{L^\infty(\Omega)} \int_{\text{spt } \theta} |u - u_\varepsilon| \left| |\nabla u|^{p-2} \nabla u - |\nabla u_\varepsilon|^{p-2} \nabla u_\varepsilon \right| \\ & \leq \|\nabla \theta\|_{L^\infty(\Omega)} \int_{\text{spt } \theta} |u - u_\varepsilon| \left[|\nabla u|^{p-2} |\nabla u| + |\nabla u_\varepsilon|^{p-2} |\nabla u_\varepsilon| \right] \end{aligned}$$

Ahora, aplicando la desigualdad de Hölder y el hecho de que $\|\nabla u|^{p-2} \nabla u\| = |\nabla u|^p$ obtenemos que

$$\int_{\text{spt } \theta} |u - u_\varepsilon| \|\nabla u|^{p-2} \nabla u\| \leq \left(\int_{\text{spt } \theta} |u - u_\varepsilon|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{\text{spt } \theta} \|\nabla u|^{p-2} \nabla u\|^{\frac{p}{p-1}} \right)^{\frac{p-1}{p}}.$$

Lo mismo podemos hacer con

$$\int_{\text{spt } \theta} |u - u_\varepsilon| \|\nabla u_\varepsilon|^{p-2} \nabla u_\varepsilon\|.$$

Finalmente, la segunda integral en (3.26) podemos estimarla en valor absoluto por

$$\|\nabla \theta\|_{L^\infty(\Omega)} \left(\int_{\text{spt } \theta} |u - u_\varepsilon|^p \, dx \right)^{1/p} \left[\left(\int_{\text{spt } \theta} |\nabla u|^p \, dx \right)^{(p-1)/p} + \left(\int_{\text{spt } \theta} |\nabla u_\varepsilon|^p \, dx \right)^{(p-1)/p} \right], \quad (3.27)$$

que tiende a 0 cuando $\varepsilon \rightarrow 0$. Por otro lado, como

$$- \int_{\text{spt } \theta} f_\varepsilon(x, u_\varepsilon, \nabla u_\varepsilon) \phi \, dx \leq \gamma_\infty \int_{\Omega} |\nabla u_\varepsilon|^{p-1} (u - u_\varepsilon) \theta \, dx + \|\phi\|_{L^\infty(\text{spt}(\theta))} \int_{\Omega} (u - u_\varepsilon) \theta \, dx, \quad (3.28)$$

con $\gamma_\infty := \sup_{x \in \text{spt}(\theta)} |\gamma(u_\varepsilon(x))|$, obtenemos que

$$\limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[- \int_{\text{spt } \theta} f_\varepsilon(x, u_\varepsilon, \nabla u_\varepsilon) \phi \, dx \right] \leq 0.$$

Luego, juntando todo vemos que, como $\theta[|\nabla u|^{p-2}\nabla u - |\nabla u_\varepsilon|^{p-2}\nabla u_\varepsilon] \cdot \nabla(u - u_\varepsilon) \geq 0$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} \theta[|\nabla u|^{p-2}\nabla u - |\nabla u_\varepsilon|^{p-2}\nabla u_\varepsilon] \cdot \nabla(u - u_\varepsilon) dx = 0. \quad (3.29)$$

Ahora, empleando la siguiente desigualdad válida para $p \geq 2$,

$$2^{p-2}|\nabla u(x) - \nabla u_\varepsilon(x)|^p \leq [|\nabla u(x)|^{p-2}\nabla u(x) - |\nabla u_\varepsilon(x)|^{p-2}\nabla u_\varepsilon(x)] \cdot \nabla(u(x) - u_\varepsilon(x))$$

y el límite (3.29), podemos probar la convergencia fuerte de ∇u_ε en $L^p_{loc}(\Omega)$, pues

$$\int_{\Omega} |\nabla u - \nabla u_\varepsilon|^p \leq 2^{2-p} \int_{\Omega} [|\nabla u(x)|^{p-2}\nabla u(x) - |\nabla u_\varepsilon(x)|^{p-2}\nabla u_\varepsilon(x)] \cdot \nabla(u(x) - u_\varepsilon(x)) \rightarrow 0$$

cuando $\varepsilon \rightarrow 0$.

Finalmente, (3.29) junto con [7, Lema 3.73]), implica

$$|\nabla u_\varepsilon|^{p-2}\nabla u_\varepsilon \rightharpoonup |\nabla u|^{p-2}\nabla u \text{ in } L^{p/(p-1)}_{loc}(\Omega).$$

Por lo tanto,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} |\nabla u_\varepsilon|^{p-2}\nabla u_\varepsilon \cdot \psi = \int_{\Omega} |\nabla u|^{p-2}\nabla u \cdot \nabla \psi.$$

Además como ∇u_ε converge a ∇u en $L^p_{loc}(\Omega)$, por el lema 3.2 obtenemos

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} f_\varepsilon(x, u_\varepsilon, \nabla u_\varepsilon) \psi dx = \int_{\Omega} f(x, u, \nabla u) \psi dx.$$

Así,

$$\int_{\Omega} |\nabla u|^{p-2}\nabla u \cdot \nabla \psi = \int_{\Omega} f(x, u, \nabla u) \psi$$

para toda $\psi \in C_0^\infty(\Omega)$ no-negativa. Luego u es supersolución débil de (2.1) en Ω .

2. Caso singular ($1 < p < 2$)

Consideremos ahora la inf-convolución

$$u_\varepsilon(x) := \inf_{y \in \Omega} \left(u(y) + \frac{|x - y|^q}{q\varepsilon^{q-1}} \right). \quad (3.30)$$

con $q > \frac{p}{p-1}$. Entonces $q > 2$ para $1 < p < 2$. En forma análoga al caso degenerado, por el teorema de Aleksandrov y el Lema 3.1, se prueba que

$$-\Delta_p u_\varepsilon \geq f_\varepsilon(x, u_\varepsilon, \nabla u_\varepsilon) \quad (3.31)$$

en casi todo punto de $\Omega_{r(\varepsilon)} \setminus \{\nabla u_\varepsilon = 0\}$. Ahora, como u_ε es semicóncava, son válidas las siguientes afirmaciones:

I.

$$\int_{\Omega} (|\nabla u_\varepsilon|^2 + \delta)^{\frac{p-2}{2}} \nabla u_\varepsilon \cdot \nabla \psi dx \geq \int_{\Omega} -\operatorname{div}((|\nabla u_\varepsilon|^2 + \delta)^{\frac{p-2}{2}} \nabla u_\varepsilon) \psi dx \quad (3.32)$$

para toda función no-negativa $\psi \in C_0^\infty(\Omega)$ y para todo $\delta > 0$.

II. Haciendo $\delta \rightarrow 0$ en (3.32) se cumple

$$\int_{\Omega} |\nabla u_{\varepsilon}|^{p-2} \nabla u_{\varepsilon} \cdot \nabla \psi \, dx \geq \int_{\Omega \setminus \{x: \nabla u_{\varepsilon}(x)=0\}} -(\Delta_p u_{\varepsilon}) \psi \, dx \quad (3.33)$$

para cada $\psi \in C_0^{\infty}(\Omega)$, $\psi \geq 0$.

La prueba de estas afirmaciones se encuentra en [9]. La primera es muy similar a la que expusimos para el caso degenerado, combinando un argumento de aproximación por funciones cóncavas vía regularización y el Lema de Fatou como en (3.20). La segunda es un poco más laboriosa y la exponemos para mayor completitud. Para la prueba de esta afirmación es necesario el siguiente lema cuya demostración se encuentra en [9]:

Lema 3.4. Supongamos que u es acotada y semicontinua inferior en Ω . Sea $Y_{\varepsilon}(x)$ el conjunto de aquellos puntos y tales que

$$u_{\varepsilon}(x) = u(y) + \frac{|x - y|^q}{q\varepsilon^{q-1}}.$$

Entonces

- I. La función $g(x) = \max_{y \in Y_{\varepsilon}(x)} |y - x|$ es semicontinua superior.
- II. Si $\nabla u_{\varepsilon}(x)$ existe, entonces para cada $y \in Y_{\varepsilon}(x)$ se cumple

$$\left(\frac{|x - y|}{\varepsilon} \right)^{q-1} \leq |\nabla u_{\varepsilon}(x)|.$$

Veamos ahora que al hacer $\delta \rightarrow 0$ en (3.32) obtenemos (3.33). Sea x_0 un punto tal que $\nabla u_{\varepsilon}(x_0)$ y $\nabla^2 u_{\varepsilon}(x_0)$ existen. Por el Lema 3.4 II., para cada $y \in Y_{\varepsilon}(x)$ se cumple

$$|y - x_0| \leq |\nabla u_{\varepsilon}(x_0)|^{\frac{1}{q-1}} \varepsilon.$$

Además, por la parte I. del mismo lema, sabemos que $g(x) = \max_{y \in Y_{\varepsilon}(x)} |y - x|$ es semicontinua superior. Por lo tanto, para cada entero positivo n existe $\rho_n > 0$ tal que si $x \in B_{\rho_n}(x_0)$ entonces

$$\begin{aligned} g(x) &\leq g(x_0) + \frac{1}{n} \\ &= \max_{y \in Y_{\varepsilon}(x)} |y - x_0| + \frac{1}{n} \\ &\leq |\nabla u_{\varepsilon}(x_0)|^{\frac{1}{q-1}} \varepsilon + \frac{1}{n}. \end{aligned}$$

Sea $r_n := |\nabla u_{\varepsilon}(x_0)|^{\frac{1}{q-1}} \varepsilon + \frac{1}{n}$. Entonces, para cada $x \in B_{\rho_n}(x_0)$

$$u_{\varepsilon}(x) = \inf_{y \in B_{r_n}(x)} \left(u(y) + \frac{|x - y|^q}{q\varepsilon^{q-1}} \right).$$

Ahora bien, para cada $y \in B_{r_n}(x)$, la función $\phi_y(x) = u(y) + \frac{|x-y|^q}{q\varepsilon^{q-1}}$ resulta ser una función continuamente diferenciable y, además,

$$\nabla^2 \phi_y(x) \leq \frac{q-1}{\varepsilon^{q-1}} r_n^{q-2} I.$$

Como u_ε es el ínfimo, es semicóncava y

$$\nabla^2 u_\varepsilon(x) \leq \frac{q-1}{\varepsilon^{q-1}} r_n^{q-2} I$$

en casi todo punto en $B_{\rho_n}(x_0)$. Luego, haciendo $n \rightarrow \infty$, obtenemos que

$$\nabla^2 u_\varepsilon(x_0) \leq \frac{q-1}{\varepsilon} |\nabla u_\varepsilon(x_0)|^{\frac{q-2}{q-1}} I. \quad (3.34)$$

Entonces, por (3.34), si $\nabla u_\varepsilon(x) = 0$, entonces $\nabla^2 u_\varepsilon(x) \leq 0$. Por otro lado, si $\nabla u_\varepsilon(x) \neq 0$, entonces, como u_ε es localmente Lipschitz y $q > \frac{p}{p-1}$, tenemos

$$\begin{aligned} -\operatorname{div} \left((|\nabla u_\varepsilon|^2 + \delta)^{\frac{p-2}{2}} \nabla u_\varepsilon \right) &= -(|\nabla u_\varepsilon|^2 + \delta)^{\frac{p-2}{2}} \left(\operatorname{tr}(\nabla^2 u_\varepsilon) + \frac{(p-2)}{|\nabla u_\varepsilon|^2 + \delta} (\nabla^2 u_\varepsilon \nabla u_\varepsilon) \cdot \nabla u_\varepsilon \right) \\ &\geq -\frac{(n+p-2)(q-1)}{\varepsilon} |\nabla u_\varepsilon|^{p-2+\frac{q-2}{q-1}} \\ &\geq -C. \end{aligned}$$

Luego, aplicando el Lema de Fatou y que $\nabla^2 u_\varepsilon(x) = 0$ si $\nabla u_\varepsilon(x) = 0$, se obtiene que

$$\begin{aligned} \liminf_{\delta \rightarrow 0} \int_{\Omega} -\operatorname{div} \left((|\nabla u_\varepsilon|^2 + \delta)^{\frac{p-2}{2}} \nabla u_\varepsilon \right) \psi &\geq \int_{\Omega \setminus \{\nabla u_\varepsilon = 0\}} \liminf_{\delta \rightarrow 0} -\operatorname{div} \left((|\nabla u_\varepsilon|^2 + \delta)^{\frac{p-2}{2}} \nabla u_\varepsilon \right) \psi \\ &= \int_{\Omega \setminus \{\nabla u_\varepsilon = 0\}} -\operatorname{div} (|\nabla u_\varepsilon|^{p-2} \nabla u_\varepsilon) \psi \\ &= \int_{\Omega \setminus \{\nabla u_\varepsilon = 0\}} -\Delta_p u_\varepsilon \psi. \end{aligned}$$

Volvemos entonces a la demostración del Teorema 3.1. Por hipótesis sabemos que $f(x, s, 0) = 0$ para cada $x \in \Omega$ y $s \in \mathbb{R}$, por lo tanto en el conjunto $\{x \in \Omega : \nabla u_\varepsilon(x) = 0\}$ se tiene que $f_\varepsilon(x, u_\varepsilon(x), \nabla u_\varepsilon(x)) \leq f(x, u_\varepsilon(x), \nabla u_\varepsilon(x)) = 0$. Así, por (3.31) y (3.33),

$$\int_{\Omega} |\nabla u_\varepsilon|^{p-2} \nabla u_\varepsilon \cdot \nabla \psi \, dx \geq \int_{\Omega} f_\varepsilon(x, u_\varepsilon, \nabla u_\varepsilon) \psi \, dx. \quad (3.35)$$

Haciendo lo mismo que para el caso singular, $p \geq 2$, y notando también que la estimación de Caccioppoli es válida para todo $1 < p < \infty$, podemos probar que $|\nabla u_\varepsilon|^{p-2} \nabla u_\varepsilon$ converge débilmente en $L_{loc}^{\frac{p}{p-1}}(\Omega)$ y que ∇u_ε converge débilmente en $L_{loc}^p(\Omega)$. Además, siguiendo el mismo razonamiento que para el caso singular, llegamos a

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_K [|\nabla u|^{p-2} \nabla u - |\nabla u_\varepsilon|^{p-2} \nabla u_\varepsilon] \cdot \nabla (u - u_\varepsilon) \, dx = 0, \quad (3.36)$$

para todo $K \subset \Omega$ compacto. De esta manera, podemos emplear nuevamente el Lema 3.73 de [7] y (3.36) para obtener

$$|\nabla u_\varepsilon|^{p-2} \nabla u_\varepsilon \rightharpoonup |\nabla u|^{p-2} \nabla u \text{ en } L_{loc}^{p/(p-1)}(\Omega), \quad (3.37)$$

y, de esta manera, se cumple que

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} |\nabla u_\varepsilon|^{p-2} \nabla u_\varepsilon \cdot \nabla \psi = \int_{\Omega} |\nabla u|^{p-2} \nabla u \cdot \nabla \psi.$$

Lo único que resta probar, entonces, es la convergencia fuerte de ∇u_ε a ∇u en $L_{loc}^p(\Omega)$. Para esto, consideremos la siguiente desigualdad vectorial (ver [6, Capítulo I])

$$\frac{|a-b|^2}{(|a|+|b|)^{2-p}} \leq C(|a|^{p-2}a - |b|^{p-2}b) \cdot (a-b), \quad 1 < p < 2,$$

con $C = C(n, p)$ y $a, b \in \mathbb{R}^n$. Entonces, aplicando la desigualdad de Hölder, vemos que

$$\begin{aligned} \int_K |\nabla u - \nabla u_\varepsilon|^p dx &= \int_K \left(\frac{|\nabla u - \nabla u_\varepsilon|^2}{(|\nabla u| + |\nabla u_\varepsilon|)^{2-p}} \right)^{\frac{p}{2}} (|\nabla u| + |\nabla u_\varepsilon|)^{(2-p)\frac{p}{2}} dx \\ &\leq \left(\int_K \frac{|\nabla u - \nabla u_\varepsilon|^2}{(|\nabla u| + |\nabla u_\varepsilon|)^{2-p}} dx \right)^{p/2} \left(\int_K (|\nabla u| + |\nabla u_\varepsilon|)^p dx \right)^{\frac{2-p}{2}} \\ &\leq C \left(\int_K \frac{|\nabla u - \nabla u_\varepsilon|^2}{(|\nabla u| + |\nabla u_\varepsilon|)^{2-p}} dx \right)^{p/2} \\ &\leq C \left(\int_K [|\nabla u|^{p-2} \nabla u - |\nabla u_\varepsilon|^{p-2} \nabla u_\varepsilon] \cdot \nabla(u - u_\varepsilon) dx \right)^{p/2}. \end{aligned}$$

donde hemos usado el hecho de que $\|\nabla u_\varepsilon\|_{L_K^p(\Omega)}$ está acotada por ser ∇u_ε débilmente convergente en $L_{loc}^p(\Omega)$. Así, de (3.36) deducimos que ∇u_ε converge a ∇u en $L_{loc}^p(\Omega)$. Finalmente, por (3.37) y el Lema 3.2, obtenemos que

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} f_\varepsilon(x, u_\varepsilon(x), \nabla u_\varepsilon(x)) \psi = \int_{\Omega} f(x, u(x), \nabla u(x)) \psi.$$

Luego, podemos concluir que

$$\int_{\Omega} |\nabla u|^{p-2} \nabla u \cdot \nabla \psi dx \geq \int_{\Omega} f(x, u, \nabla u) \psi dx.$$

Por lo tanto u resulta ser supersolución débil de (2.1) en Ω . ■

3.2. Prueba del Teorema 3.2

Para probar el Teorema 3.2 basta probar la siguiente proposición ya que en [16] se encuentra la prueba del mismo teorema para el caso de soluciones viscosas (ver Teorema 1.5 de [16]).

Proposición 3.1. Sea $u : \Omega \rightarrow (-\infty, +\infty]$ una función semicontinua inferior. Si $u \neq +\infty$ es una supersolución viscosa de (2.1), entonces u es una supersolución viscosa Feeble de (2.1).

Prueba. Sea $x_0 \in \Omega$ y $\varphi \in \mathcal{C}^2(\Omega)$ tal que $\varphi(x_0) = u(x_0)$, $\varphi(x) \leq u(x)$ y $\nabla\varphi(x_0) \neq 0$. Como $\nabla\varphi(x_0) \neq 0$ y $\varphi \in \mathcal{C}^2(\Omega)$, existe $\rho > 0$ tal que $\nabla\varphi(x) \neq 0$ para todo $x \in B_\rho(x_0)$. Por lo tanto, φ es una función test para u en el punto x_0 en el sentido de la Definición 2.17. Luego, como $\nabla\varphi(x) \neq 0$ para todo $x \in B_\rho(x_0)$, se cumple

$$-\Delta_p\varphi(x_0) = \lim_{r \rightarrow 0} \sup_{x \in B_r(x_0) \setminus \{x_0\}} (-\Delta_p\varphi(x)) \geq f(x_0, u(x_0), \nabla\varphi(x_0)).$$

Así, u es supersolución viscosa Feeble de (2.1) en Ω . ■

Capítulo 4

Resultado de tipo Radó para el p-Laplaciano no-homogéneo

A continuación enunciaremos y demostraremos el principal resultado de este trabajo.

Teorema 4.1. Sea Ω un dominio en \mathbb{R}^n , sea $1 < p < \infty$ y supongamos que $u \in C^1(\Omega)$. Sea $f = f(x, s, \eta)$ una función uniformemente continua, Lipschitz en η , no-creciente en s y que satisface la condición de crecimiento (3.1). Además, supongamos que $f(x, s, 0) = 0$ para todo $x \in \Omega$, $s \in \mathbb{R}$. Si u es una solución débil de la ecuación (2.1) en el conjunto abierto $\Omega \setminus \{x \in \mathbb{R}^n : u(x) = 0\}$, entonces u es solución débil de (2.1) en todo el dominio Ω .

La demostración del Teorema 4.1 se llevará a cabo mediante los siguientes pasos:

- Aplicando la equivalencia de soluciones débiles y viscosas Feeble, se demostrará una versión más simple de la propiedad de Radó, la cual consiste en eliminar el conjunto de puntos críticos de u .
- La segunda etapa consiste en eliminar aquellos puntos donde u se anula que no son críticos. Para ello, se adaptará al caso no homogéneo el lema de Martio (Lema 2.22 de [15]).

Es importante mencionar que, la hipótesis de regularidad sobre la función u no puede debilitarse. Aún si se asumiera que u es Lipschitz continua, el resultado podría no ser verdadero. Veámoslo con un ejemplo. Consideremos la ecuación homogénea, es decir, cuando $f \equiv 0$, para todo $1 < p < \infty$. Antes que nada, vemos que el operador p-Laplaciano puede escribirse de la siguiente manera

$$-\Delta_p u = A(\nabla u) \cdot \nabla^2 u$$

donde $A \cdot \nabla^2 u$ significa el producto escalar entre las matrices A y $\nabla^2 u$. Esta matriz se define como

$$A(\eta) = |\eta|^{p-2} I + (p-2)|\eta|^{p-4} \eta \otimes \eta$$

donde $\eta \otimes \eta$ denota el producto tensorial de η por sí mismo, es decir, es la matriz cuya entrada ij es $\eta_i \eta_j$. Veamos que esto efectivamente es así. Sea $u \in C^2(\Omega)$, entonces recordemos

que el operador p-Laplaciano puede escribirse como

$$-\Delta_p u = |\nabla u|^{p-2} \operatorname{tr}(\nabla^2 u) + (p-2)|\nabla u|^{p-4} (\nabla^2 u \nabla u) \cdot \nabla u.$$

Entonces,

$$\begin{aligned} A(\nabla u) \cdot \nabla^2 u &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n A_{ij} \nabla^2 u_{ij} \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |\nabla u|^{p-2} I_{ij} \partial_{ij} u + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (p-2) |\nabla u|^{p-4} \partial_i u \partial_j u \partial_{ij} u \\ &= |\nabla u|^{p-2} \sum_{i=1}^n \partial_{ii} u + (p-2) |\nabla u|^{p-4} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \partial_i u \partial_j u \partial_{ij} u \\ &= |\nabla u|^{p-2} \operatorname{tr}(\nabla^2 u) + (p-2) |\nabla u|^{p-4} (\nabla^2 u \nabla u) \cdot \nabla u \\ &= \Delta_p u. \end{aligned}$$

Sea $\eta_0 \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Definimos

$$u(x) = 2|x \cdot \eta_0|.$$

Entonces vemos que u es Lipschitz en \mathbb{R}^n pues

$$\begin{aligned} |u(x) - u(y)| &= |2|x \cdot \eta_0| - 2|y \cdot \eta_0|| \\ &\leq 2|x - y| |\eta_0| \end{aligned}$$

Sin embargo, $u \notin \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n)$ ya que u no es diferenciable en $\{x \in \mathbb{R}^n : x \cdot \eta_0 = 0\}$.

Ahora bien, si calculamos el gradiente de u en un punto x fuera del conjunto $\{x \cdot \eta_0 = 0\}$, vemos que si $x \cdot \eta_0 > 0$, $\nabla u(x) = 2\eta_0$ y si $x \cdot \eta_0 < 0$, $\nabla u(x) = -2\eta_0$. Por lo tanto $\nabla^2 u = 0$ en $\mathbb{R}^n \setminus \{x \in \mathbb{R}^n : x \cdot \eta_0 = 0\}$. Esto significa que u es solución clásica de $-\Delta_p u = 0$ en $\mathbb{R}^n \setminus \{x \in \mathbb{R}^n : u(x) = 0\}$ (vemos que $x \cdot \eta_0 = 0$ si y sólo si $u(x) = 0$). Ahora bien, como u es de clase \mathcal{C}^2 en $\{x \in \mathbb{R}^n : x \cdot \eta_0 > 0\}$ y en $\{x \in \mathbb{R}^n : x \cdot \eta_0 < 0\}$ y además u satisface puntualmente la ecuación $-\Delta_p u = 0$ en estos conjuntos, se obtiene que u es solución viscosa Feeble de $\mathbb{R}^n \setminus \{x \in \mathbb{R}^n : u(x) = 0\}$. Sin embargo, u no es solución viscosa Feeble en todo \mathbb{R}^n . En efecto, si definimos la siguiente función test

$$\varphi(x) = x \cdot \eta_0 + \frac{1}{2}(\eta_0 \otimes \eta_0)x \cdot x,$$

vemos que $u(x) = \varphi(x) = 0$ si $x \cdot \eta_0 = 0$. Además si $x \cdot \eta_0 = 0$ entonces $u(y) \geq \varphi(y)$ para cada $y \in B_{\frac{1}{|\eta_0|}}(x)$. Pues, si $y \in B_{\frac{1}{|\eta_0|}}(x)$, entonces

$$\begin{aligned} |y \cdot \eta_0| &= |(y-x) \cdot \eta_0 + x \cdot \eta_0| \\ &\leq |y-x| |\eta_0| + |x \cdot \eta_0| \\ &< 1 \end{aligned}$$

Así

$$\begin{aligned}
\varphi(y) &= y \cdot \eta_0 + \frac{1}{2}(\eta_0 \otimes \eta_0)y \cdot y \\
&= y \cdot \eta_0 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \eta_{0_i} \eta_{0_j} y_i y_j \\
&= y \cdot \eta_0 + \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^n \eta_{0_i} y_i \right) \left(\sum_{j=1}^n \eta_{0_j} y_j \right) \\
&= y \cdot \eta_0 + \frac{1}{2} (y \cdot \eta_0)^2 \\
&\leq |y \cdot \eta_0| + \frac{1}{2} |y \cdot \eta_0| \\
&\leq 2|y \cdot \eta_0| \\
&= u(y)
\end{aligned}$$

Por otro lado, si $x \cdot \eta_0 = 0$ entonces

$$\nabla \varphi(x) = \eta_0 + (x \cdot \eta_0) \eta_0 \neq 0.$$

Sin embargo, si $x \cdot \eta_0 = 0$

$$\begin{aligned}
-\Delta_p \varphi(x) &= -A(\nabla \varphi(x)) \cdot \nabla^2 \varphi(x) \\
&= -A(\eta_0) \cdot \nabla^2 \varphi(x) \\
&= -A(\eta_0) \cdot (\eta_0 \otimes \eta_0) \\
&= -A(\eta_0) \eta_0 \cdot \eta_0 \\
&= -|\eta_0|^{p-2} \eta_0 \cdot \eta_0 - (p-2) |\eta_0|^{p-4} (\eta_0 \otimes \eta_0) \eta_0 \cdot \eta_0 \\
&= -|\eta_0|^{p-2} |\eta_0|^2 - (p-2) |\eta_0|^{p-4} |\eta_0|^4 \\
&= -(p-1) |\eta_0|^p \\
&< 0
\end{aligned}$$

Luego vemos que φ es una función test en el sentido de la Definición 2.16, sin embargo no satisface que $-\Delta_p \varphi(x) \geq 0$. Por lo tanto, u no es supersolución viscosa Feeble en todo \mathbb{R}^n .

4.1. Exclusión de los puntos críticos

Como mencionamos en la Introducción, toda la dificultad proviene de los puntos críticos y es por esto que aplicamos la equivalencia entre las Definiciones 2.15 y 2.16. El punto crucial, ahora, es establecer el siguiente resultado.

Proposición 4.1. Sea $u \in C^1(\Omega)$ y sea $f = f(x, s, \eta)$ como en el Teorema 4.1. Si u es solución débil de (2.1) en

$$\Omega \setminus \{x \in \mathbb{R}^n : \nabla u(x) = 0\},$$

entonces u es solución débil de (2.1) en todo el dominio Ω .

La demostración de la Proposición 4.1 es la misma que la de Juutinen y Lindqvist en [10], pero la exponemos para mayor completitud.

Prueba. Para probar que dada una función $u \in C^1(\Omega)$ es solución débil de (2.1), primero probaremos que satisface la Definición 2.16 en todo Ω . Sea $x_0 \in \Omega$ y supongamos que φ es una función test que toca a u por debajo en el punto x_0 . Por el cálculo diferencial,

$$\nabla\varphi(x_0) = \nabla u(x_0).$$

Luego, si $\nabla u(x_0) = 0$, no hay nada que probar. Por otro lado, si $\nabla u(x_0) \neq 0$, entonces, por el Teorema 3.2, la Proposición 3.1 y la hipótesis de que u es solución débil de (2.1) en $\Omega \setminus \{x \in \Omega : \nabla u(x) = 0\}$, es claro que $-\Delta_p(\varphi(x_0)) \geq f(x_0, \varphi(x_0), \nabla\varphi(x_0))$. Así u es una supersolución viscosa Feeble. Análogamente se prueba que u es una subsolución viscosa Feeble de (2.1). Finalmente, aplicando el Teorema 3.1, obtenemos el resultado deseado. ■

4.2. Lema de Martio para el caso no-homogéneo

Definición 4.1. (La *unión* de dos operadores diferenciales). Sea T un hiperplano de dimensión $n - 1$. Supongamos que Ω es un dominio en \mathbb{R}^n y que T divide a Ω en dos dominios Ω_1 y Ω_2 . Para $i = 1, 2$ sean $A_i : \Omega_i \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ dos operadores diferenciales que satisfacen

$$|A_i(x, s, h)| \leq \gamma_1 |h|^{p-1} \tag{4.1}$$

$$A_i(x, s, h) \cdot h \geq \gamma_2 |h|^p \tag{4.2}$$

en Ω_i , con $1 < p < \infty$. El operador diferencial $A : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ con $A|_{(\Omega_i \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)} = A_i$, con $i = 1, 2$ se llama la *unión* de A_1 y A_2 .

Notación 4.1. Notaremos H^+ al semiespacio superior $x_n > 0$ de \mathbb{R}^n y H^- al semiespacio inferior $x_n < 0$.

A continuación probaremos el Lema de Martio para ecuaciones no-homogéneas. La primera parte de la demostración es algo diferente a la prueba del lema clásico ya que hemos hecho una adaptación al contexto no-homogéneo.

Lema 4.1. Sea $u \in C^1(\Omega)$ y sea T el hiperplano $T = \{x \in \mathbb{R}^n : x_n = 0\}$. Sea $A : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ un operador como en la Definición 4.1 tal que

$$\lim_{x \rightarrow x_0} A(x, s, h) \tag{4.3}$$

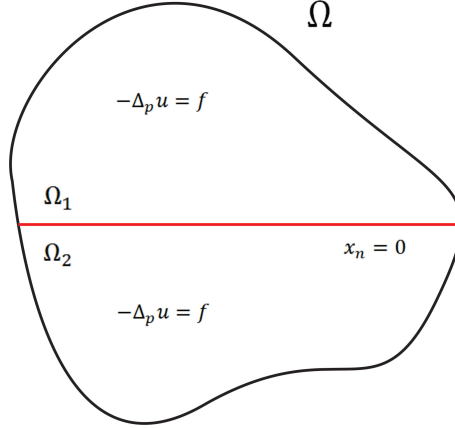
existe uniformemente sobre subconjuntos compactos de $(T \cap \Omega) \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$. Además, supongamos que A satisface las condiciones (4.1) y (4.2). Sea $f = f(x, s, \eta)$ definida en $\Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ que satisface la condición de crecimiento (3.1). Si $u|_{\Omega_i}$ es una solución débil de

$$\nabla \cdot A_i(x, v, \nabla v) = f(x, v, \nabla v) \tag{4.4}$$

en Ω_i , $i = 1, 2$, entonces u es solución débil de la ecuación unión

$$\nabla \cdot A(x, v, \nabla v) = f(x, v, \nabla v) \quad (4.5)$$

en Ω .



Prueba. Sea Ω_1 la parte de Ω por encima de T . Por (4.3) sabemos que la función $A^* : (T \cap \Omega) \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ definida como

$$A^*(x_0, s, h) = \lim_{x \rightarrow x_0} A(x, s, h)$$

es continua. Como $u \in C^1(\Omega)$, basta probar que

$$\int_{\Omega} A(x, u, \nabla u) \cdot \nabla \varphi dx = \int_{\Omega} f(x, u, \nabla u) \varphi dx \quad (4.6)$$

para cada $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$. Sea $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ y para cada $t > 0$ sea $h_t : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ la función

$$h_t(x) = \begin{cases} \frac{t - |x_n|}{t}, & \text{si } |x_n| < t, \\ 0, & \text{si } |x_n| \geq t. \end{cases}$$

Entonces $h_t|_T = 1$ y obtenemos

$$\int_{\Omega} A(x, u, \nabla u) \cdot \nabla \varphi dx = \int_{\text{spt} \varphi} A(x, u, \nabla u) \cdot \nabla (\varphi(1 - h_t)) dx + \int_{\Omega} A(x, u, \nabla u) \cdot \nabla (\varphi h_t) dx = I_1 + I_2$$

Ahora bien, $\varphi(1 - h_t) \in W_0^{1,p}(\Omega_1 \cup \Omega_2)$ ya que $\varphi(1 - h_t)|_{\Omega_i}$ se anula en $\partial\Omega_i$ para cada $i = 1, 2$ y como u es solución de (4.4) en Ω_i , $i = 1, 2$, la primer integral es

$$I_1 = \int_{\text{spt} \varphi} f(x, u, \nabla u) \varphi(1 - h_t) dx.$$

Sea $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$h(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x_n = 0, \\ 0, & \text{si } x_n \neq 0. \end{cases}$$

Veamos que h_t converge puntualmente a h cuando $t \rightarrow 0$. Sea $(t_m)_{m \in \mathbb{N}}$ una sucesión de números positivos tal que $t_m \rightarrow 0$ cuando $m \rightarrow \infty$, y sea $x \in \mathbb{R}^n$. Si $x_n = 0$, entonces $h_{t_m}(x) = 1 \forall m$ y $h(x) = 1$. Así $|h_{t_m}(x) - h(x)| = 0 \forall m$. Supongamos que $x_n \neq 0$. Entonces $|x_n| > 0$ y, como $t_m \rightarrow 0$ cuando $m \rightarrow \infty$, existe un entero positivo m_0 tal que si $m \geq m_0$ entonces $t_m < |x_n|$. Así, si $m \geq m_0$, $|x_n| > t_m$ y, por lo tanto, $h_{t_m}(x) = 0$. Luego, si $m \geq m_0$, $|h_{t_m}(x) - h(x)| = 0$.

Por otro lado, observemos que, como $1 - h_t \leq 1$ y f satisface la condición de crecimiento (3.1) se cumple

$$|f(x, u, \nabla u) \varphi(1 - h_t)| \leq (\gamma(|u|) |\nabla u|^{p-1} + \phi(x)) |\varphi|$$

Ahora bien, las funciones γ , u , $|\nabla u|$ y φ son continuas en $\text{spt} \varphi$ y $\text{spt} \varphi$ es compacto, por lo que están acotadas en dicho conjunto. Además, $\phi \in L_{loc}^\infty(\Omega)$, por lo que ϕ también está acotada en $\text{spt} \varphi$. Luego, existe una constante uniforme C tal que

$$|f(x, u, \nabla u) \varphi(1 - h_t)| \leq C.$$

Por lo tanto, si hacemos $t \rightarrow 0$ en la integral I_1 podemos aplicar el Teorema de Convergencia Dominada para concluir

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0} I_1 &= \lim_{t \rightarrow 0} \left(\int_{\text{spt} \varphi} f(x, u, \nabla u) \varphi(1 - h_t) dx \right) = \int_{\text{spt} \varphi} \lim_{t \rightarrow 0} (f(x, u, \nabla u) \varphi(1 - h_t)) dx \\ &= \int_{\text{spt} \varphi \setminus \{x \in \mathbb{R}^n : x_n = 0\}} \lim_{t \rightarrow 0} (f(x, u, \nabla u) \varphi(1 - h_t)) dx \\ &= \int_{\text{spt} \varphi \setminus \{x \in \mathbb{R}^n : x_n = 0\}} f(x, u, \nabla u) \varphi dx \\ &= \int_{\Omega} f(x, u, \nabla u) \varphi dx. \end{aligned}$$

Aquí también hemos usado el hecho de que $\{x \in \mathbb{R}^n : x_n = 0\}$ es un conjunto de medida nula, por lo que la integral sobre el mismo vale cero.

A partir de ahora, la prueba es la misma que la que realiza Martio en [15], sin embargo, la exponemos con detalle para conveniencia del lector.

Probaremos ahora que $I_2 \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow 0$. Esto demostrará (4.6). Sea $S_t = \{x \in \mathbb{R}^n : |x_n| \leq t\}$ y observemos que

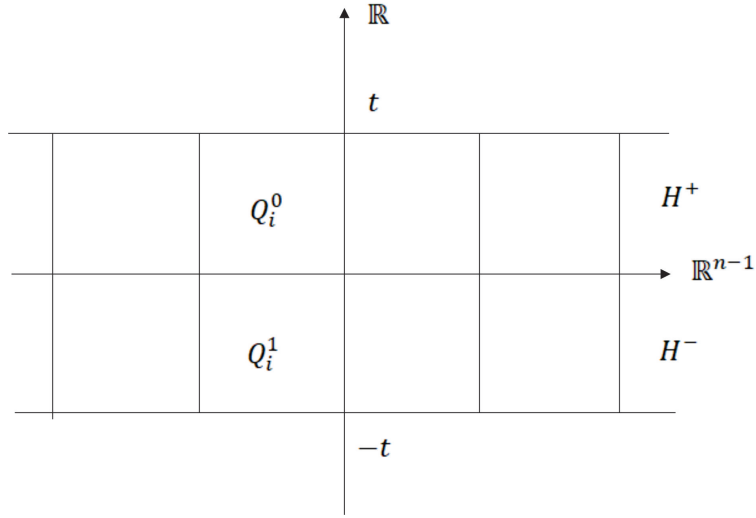
$$I_2 = \int_{\Omega} \varphi A(x, u, \nabla u) \cdot \nabla h_t dx + \int_{\Omega} h_t A(x, u, \nabla u) \cdot \nabla \varphi dx = I_2' + I_2''.$$

Como $|h_t| \leq 1$ y $u \in C^1(\Omega)$, obtenemos de (4.1) que

$$|I_2''| \leq \int_{\text{spt}\varphi \cap S_t} |A(x, u, \nabla u)| |\nabla \varphi| dx \leq \gamma_1 \max_{x \in \text{spt}\varphi \cap S_t} |\nabla u(x)|^{p-1} \max_{x \in \text{spt}\varphi \cap S_t} |\nabla \varphi| m(\text{spt}\varphi \cap S_t).$$

Como $|\nabla \varphi| \leq M$ y como $m(\text{spt}\varphi \cap S_t) \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow 0$, se sigue de esta desigualdad que $I_2'' \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow 0$.

Para estimar la integral I_2' dividimos el conjunto S_t en cubos cerrados no superpuestos Q_i^0 y Q_i^1 , $i = 1, 2, \dots$, cuyos lados son iguales a t y tales que un lado se encuentra en T ; los cubos Q_i^0 permanecen en $\overline{H^+}$ y los cubos Q_i^1 en $\overline{H^-}$. Más aún, Q_i^0 y Q_i^1 tienen un lado en común para cada i .



Sea $\varepsilon > 0$. Como φ es uniformemente continua, existe $t_0 > 0$ tal que para cada $0 < t \leq t_0$

$$|\varphi(x) - \varphi(x_i^0)| < \varepsilon, \quad x \in Q_i^0 \cup Q_i^1,$$

$i = 1, 2, \dots$. Aquí x_i^0 es el centro del cubo Q_i^0 . Así, para $t \leq t_0$,

$$|I_2'| = \left| \sum_{i=1}^{\infty} \left(\int_{Q_i^0 \cap \text{spt}} \varphi(x) A(x, u, \nabla u) \cdot \nabla h_t dx + \int_{Q_i^1 \cap \text{spt}} \varphi(x) A(x, u, \nabla u) \cdot \nabla h_t dx \right) \right|$$

Entonces, si sumamos y restamos las siguientes integrales

$$\int_{Q_i^0 \cap \text{spt}} \varphi(x_i^0) A(x, u, \nabla u) \cdot \nabla h_t dx$$

$$\int_{Q_i^1 \cap \text{spt}} \varphi(x_i^0) A(x, u, \nabla u) \cdot \nabla h_t dx$$

en

$$\int_{Q_i^0 \cap \text{spt}} \varphi(x) A(x, u, \nabla u) \cdot \nabla h_t dx + \int_{Q_i^1 \cap \text{spt}} \varphi(x) A(x, u, \nabla u) \cdot \nabla h_t dx$$

obtenemos

$$\begin{aligned} \int_{Q_i^j \cap \text{spt}} \varphi(x) A(x, u, \nabla u) \cdot \nabla h_t dx &= \int_{Q_i^j \cap \text{spt}} (\varphi(x) - \varphi(x_i^0)) A(x, u, \nabla u) \cdot \nabla h_t dx \\ &+ \int_{Q_i^j \cap \text{spt}} \varphi(x_i^0) A(x, u, \nabla u) \cdot \nabla h_t dx \end{aligned}$$

para cada $j = 1, 2$. Luego,

$$\begin{aligned} |I_2'| &= \left| \sum_{i=1}^{\infty} \left(\int_{Q_i^0 \cap \text{spt}} \varphi(x) A(x, u, \nabla u) \cdot \nabla h_t dx + \int_{Q_i^1 \cap \text{spt}} \varphi(x) A(x, u, \nabla u) \cdot \nabla h_t dx \right) \right| \\ &\leq \left| \sum_{i=1}^{\infty} \varphi(x_i^0) \int_{Q_i^0 \cap \text{spt}} A(x, u, \nabla u) \cdot \nabla h_t dx + \sum_{i=1}^{\infty} \varphi(x_i^0) \int_{Q_i^1 \cap \text{spt}} A(x, u, \nabla u) \cdot \nabla h_t dx \right| \\ &+ \varepsilon t^{-1} \int_{S_t \cap \text{spt}} |A(x, u, \nabla u)| \end{aligned}$$

Ahora bien,

$$\nabla h_t(x) = \begin{cases} -t^{-1} e_n, & \text{si } 0 < x_n < t, \\ t^{-1} e_n, & \text{si } -t < x_n < 0, \\ 0, & \text{si } |x_n| \geq t. \end{cases}$$

Por lo tanto, como los cubos Q_i^0 están contenidos en $\overline{H^+}$ y los cubos Q_i^1 están en $\overline{H^-}$, se tiene que

$$\begin{aligned} |I_2'| &\leq \left| - \sum_{i=1}^{\infty} \varphi(x_i^0) t^{-1} \int_{Q_i^0 \cap \text{spt}} A(x, u, \nabla u) \cdot e_n dx + \sum_{i=1}^{\infty} \varphi(x_i^0) t^{-1} \int_{Q_i^1 \cap \text{spt}} A(x, u, \nabla u) \cdot e_n dx \right| \\ &+ \varepsilon t^{-1} \int_{S_t \cap \text{spt}} |A(x, u, \nabla u)| dx = S_1 + S_2. \end{aligned}$$

Por otro lado,

$$m(S_t \cap \text{spt}) \leq \omega_{n-1} (\text{diam}(\text{spt}))^{n-1} 2t = c_1 t \quad (4.7)$$

donde ω_{n-1} es la medida de la bola unitaria en \mathbb{R}^{n-1} . Como $|\nabla u| \leq M_1$ en spt , con la desigualdad (4.1) se obtiene

$$S_2 \leq \varepsilon t^{-1} \gamma_1 M_1^{p-1} c_1 t \leq c_2 \varepsilon. \quad (4.8)$$

Por otro lado, (4.3), junto con el hecho de que $u \in C^1(\Omega)$, implican que existe un $t_1 > 0$ tal que para cada $0 < t \leq t_1$

$$|A(x, u(x), \nabla u(x)) - A(y, u(y), \nabla u(y))| < \varepsilon \quad (4.9)$$

para cada $x, y \in (Q_i^0 \cup Q_i^1) \cap \text{spt}\varphi$, $i = 1, 2, \dots$. Si P es la reflexión en el plano T , entonces obtenemos de (4.9)

$$\begin{aligned} S_1 &\leq \sum_{i=1}^{\infty} |\varphi(x_i^0)| t^{-1} \int_{Q_i^0 \cap \text{spt}\varphi} |A(x, u(x), \nabla u(x)) - A(P(x), u(P(x)), \nabla u(P(x)))| dx \\ &\leq M_2 t^{-1} \varepsilon m(S_t \cap \text{spt}\varphi) \\ &\leq M_2 c_1 \varepsilon. \end{aligned} \quad (4.10)$$

donde hemos utilizado también (4.7) y el hecho de que $|\varphi| \leq M_2$. Se sigue de (4.8) y (4.10) que $I_2' \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow 0$. Así hemos probado que $I_2 \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow 0$. Esto completa la demostración. \blacksquare

4.3. Prueba del Teorema 4.1

En esta sección enunciaremos y demostraremos el último lema, el cual permite concluir la demostración del Teorema 4.1. Este resultado es una adaptación de la Proposición 8 de [13] que también la exponen Juutinen y Lindqvist en el Lema 8 de [10]. Tanto Kilpeläinen como Juutinen y Lindqvist, prueban el mismo resultado para el caso de las llamadas funciones *p-armónicas*, las cuales se definen como soluciones débiles de la ecuación homogénea dada por el p-Laplaciano. A continuación enunciamos y probamos este lema adaptado para la ecuación no-homénea.

Lema 4.2. Sea $u \in C^1(\Omega)$ tal que $\nabla u \neq 0$ en Ω y sea $f = f(x, s, \eta)$ definida en $\Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ que satisface la condición de crecimiento (3.1). Si u es solución débil de (2.1) en el conjunto $\Omega \setminus \{x \in \mathbb{R}^n : u(x) = 0\}$, entonces u es solución débil de (2.1) en todo el dominio Ω .

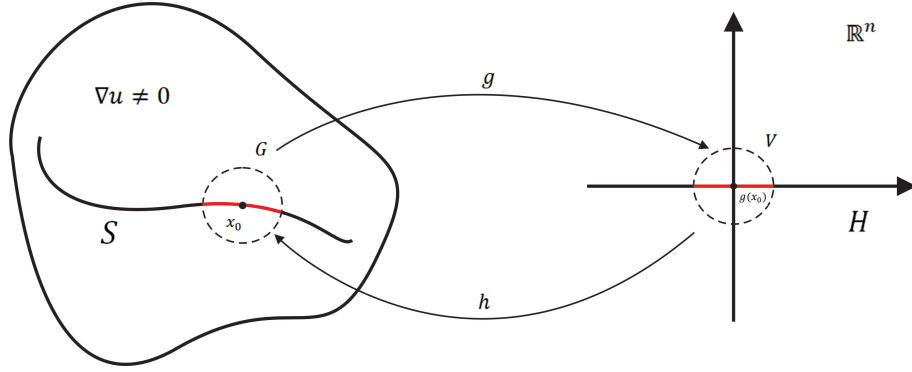
Prueba. Sea $S = \{x \in \Omega : u(x) = 0\}$. Probaremos primero que, dado $x_0 \in S$, existe un entorno abierto $G \subset \Omega$ de x_0 tal que u es solución débil de (2.1) en G .

Sea $x_0 \in S$. Como $\nabla u(x_0) \neq 0$, podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que $\frac{\partial u}{\partial x_n}(x_0) \neq 0$. Definimos $g(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_{n-1}, u(x)) - ((x_0)_1, \dots, (x_0)_{n-1}, u(x_0))$. Donde $x = (x_1, \dots, x_n)$ y $(x_0)_i$ denota la i -ésima componente de x_0 . Luego, la matriz jacobiana de g en el punto x_0 es

$$g'(x_0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial u}{\partial x_1}(x_0) & \frac{\partial u}{\partial x_2}(x_0) & \cdots & \frac{\partial u}{\partial x_n}(x_0) \end{pmatrix}$$

Vemos que $\det g'(x_0) = \frac{\partial u}{\partial x_n}(x_0) \neq 0$. Luego, por el Teorema de la Función Inversa, existe un entorno abierto $G \subset \mathbb{R}^n$ de x_0 y $V \subset \mathbb{R}^n$ abierto tal que $g(x_0) \in V$ y $g|_G$ tiene inversa $h : V \rightarrow G$ tal que $h \in C^1(V)$.

Observemos que g aplica $S \cap G$ en una porción del hiperplano $H = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_n = 0\}$.



Luego, bajo el cambio de coordenadas $x = h(y)$, el p-Laplaciano puede escribirse como $-\operatorname{div} \mathcal{A} = \bar{f}$, donde

$$\mathcal{A}(y, s, \eta) = J(y, h)h'(y)^{-1}|h'(y)^{-1}\eta|^{p-2}[h'(y)^{-1}]^t\eta;$$

y

$$\bar{f}(y, s, \eta) = f(h(y), s, [h'(y)^{-1}]^t\eta).$$

Esta transformación puede encontrarse en [7] junto con la verificación de las condiciones (4.1) y (4.2) para el nuevo operador \mathcal{A} .

Ahora bien, vemos, por un lado, que \mathcal{A} resulta ser continua en $V \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ por cómo está definida. Por otro lado, se tiene que \bar{f} satisface la condición de crecimiento (3.1) en $V \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ pues

$$|\bar{f}(y, s, \eta)| = |f(h(y), s, [h'(y)^{-1}]^t\eta)| \leq \gamma(|s|)|[h'(y)^{-1}]^t\eta|^{p-1} + \phi(h(y))$$

Ahora bien, como $y \in V$ y V es abierto, existe una bola abierta B tal que $\bar{B} \subset V$ y tal que $y \in B$ y, como $h \in \mathcal{C}^1(V)$, $h \in \mathcal{C}^1(\bar{B})$, por lo tanto $h'(z)^{-1}$ está acotado en \bar{B} . Por otro lado, si tomamos $\tilde{\phi} = \phi \circ h$ y $\tilde{\gamma}(s) = \gamma(s) \|h'(z)^{-1}\|_{L^\infty(\bar{B})}$, vemos que,

$$|\bar{f}(y, s, \eta)| \leq \tilde{\gamma}(|s|)|\eta|^{p-1} + \tilde{\phi}(y).$$

Luego, tanto el operador \mathcal{A} como la nueva función \bar{f} satisfacen los supuestos del Lema 4.1.

Ahora, si $G' \subset G$ es abierto, entonces $g(G') = V'$ es abierto, por ser g continua y, además, $V' \subset V$ y $h(V') = G'$. Veamos que u es solución débil de (2.1) en G' si y sólo si $v = u \circ h$ es solución débil de

$$-\operatorname{div} \mathcal{A}(y, v, \nabla v) = \bar{f}(y, v, \nabla v) \quad (4.11)$$

en V' . Primero supongamos que u es solución débil de (2.1) en G' . Sea $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(V')$, entonces $\tilde{\varphi} = \varphi \circ g|_{G'} \in \mathcal{C}_0^1(G')$ (notemos que $\operatorname{spt}(\tilde{\varphi}) = h(\operatorname{spt}(\varphi))$, h es continua y $\operatorname{spt}(\varphi)$ es compacto, por lo que $\operatorname{spt}(\tilde{\varphi})$ es compacto). Entonces

$$\int_{G'} |\nabla u(x)|^{p-2} \nabla u(x) \cdot \nabla \tilde{\varphi}(x) dx = \int_{G'} f(x, u(x), \nabla u(x)) \tilde{\varphi}(x) dx.$$

Además, vemos que si $x = h(y)$, por la Regla de la Cadena se tiene que

$$\nabla_x u(x) = \nabla_x u(h(y)) = [h'(y)^{-1}]^t \nabla v(y)$$

y,

$$\nabla_x \tilde{\varphi}(h(y)) = [h'(y)^{-1}]^t \nabla \varphi(y).$$

Luego, como $h \in \mathcal{C}^1(V)$, en particular, $h \in \mathcal{C}^1(V')$ y así, por la Fórmula de Cambio de Variables se cumple

$$\begin{aligned} \int_{G'} |\nabla u(x)|^{p-2} \nabla u(x) \cdot \nabla \tilde{\varphi}(x) dx &= \int_{V'} J(y, h) [h'(y)^{-1}]^t |\nabla v(y)|^{p-2} [h'(y)^{-1}]^t \nabla v(y) \cdot [h'(y)^{-1}]^t \nabla \varphi(y) dy \\ &= \int_{V'} J(y, h) h'(y)^{-1} [h'(y)^{-1}]^t |\nabla v(y)|^{p-2} [h'(y)^{-1}]^t \nabla v(y) \cdot \nabla \varphi(y) dy \\ &= \int_{V'} \mathcal{A}(y, v(y), \nabla v(y)) \cdot \nabla \varphi(y) dy. \end{aligned}$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned} \int_{G'} f(x, u(x), \nabla u(x)) \tilde{\varphi}(x) dx &= \int_{V'} f(h(y), u(h(y)), [h'(y)^{-1}]^t \nabla v(y)) \varphi(y) dy \\ &= \int_{V'} \bar{f}(y, v(y), \nabla v(y)) \varphi(y) dy. \end{aligned}$$

Por lo tanto, v es solución débil de (4.11) en V' . Recíprocamente, supongamos que v es solución débil de (4.11) en V' . Entonces, si $\tilde{\varphi} \in \mathcal{C}_0^\infty(G')$, la función $\varphi = \tilde{\varphi} \circ h|_{V'} \in \mathcal{C}_0^1(V')$. Luego, como v es solución débil de (4.11) en V' , se tiene que

$$\int_{V'} \mathcal{A}(y, v, \nabla v) \cdot \nabla \varphi dy = \int_{V'} \bar{f}(y, v, \nabla v) \varphi dy.$$

Así, haciendo el camino inverso, llegamos a

$$\int_{G'} |\nabla u|^{p-2} \nabla u \cdot \nabla \tilde{\varphi} dx = \int_{G'} f(x, u, \nabla u) \tilde{\varphi} dx.$$

Luego, u es solución de (4.11) en G' .

Ahora, observemos que lo que probamos arriba puede aplicarse a los abiertos $G' = G \setminus S$ y $V' = V \setminus H$ (notemos que $G \setminus S$ es abierto por ser $u \in \mathcal{C}^1(\Omega)$). Por lo tanto, u es solución débil de (2.1) en $G \setminus S$ si y sólo si $v = u \circ h$ es solución débil de (4.11) en $V \setminus H$.

Ahora bien, por hipótesis sabemos que u es solución débil de (2.1) en $G \setminus S$, por lo tanto, v es solución débil de (4.11) en $V \setminus H$. Así, por el Lema 4.1, v es solución débil de (4.11) en V . Nuevamente, podemos aplicar lo probado anteriormente a los abiertos $G' = G$ y $V' = V$ para concluir que u es solución débil de (2.1) en G .

Veamos ahora que u es solución débil de (2.1) en todo Ω . Probamos arriba que, para cada $x_i \in S$, existe un entorno abierto G_i de x_i en Ω , tal que u es solución débil de (2.1) en G_i . Sea $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ y $K = \text{spt} \varphi$. Como $S \cap K$ es compacto, existe una colección finita de abiertos $\{G_i\}_{i=1}^N$ que cubre a $S \cap K$ y $u|_{G_i}$ es solución débil de (2.1) en G_i para cada $1 \leq i \leq N$. Llamemos $G_0 = \Omega \setminus (S \cap K)$. Entonces $\Omega = \cup_{i=0}^N G_i$ y cada G_i es abierto. Luego, existe $\{\zeta_i\}_{i=0}^N$, una partición de la unidad subordinada al cubrimiento $\{G_i\}_{i=0}^N$. Por lo tanto, $\zeta_i \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$, $\text{spt}(\zeta_i) \subset G_i$ y $\sum_{i=0}^N \zeta_i = 1$.

Observar que $\varphi = \sum_{i=0}^N \varphi \zeta_i$ en Ω . Luego,

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} |\nabla u|^{p-2} \nabla u \cdot \nabla \varphi dx &= \int_{\Omega} |\nabla u|^{p-2} \nabla u \cdot \left(\nabla \left(\sum_{i=0}^N \varphi \zeta_i \right) \right) dx \\
&= \int_{\Omega} \sum_{i=0}^N (|\nabla u|^{p-2} \nabla u \cdot \nabla (\varphi \zeta_i)) dx \\
&= \sum_{i=0}^N \int_{\Omega} |\nabla u|^{p-2} \nabla u \cdot \nabla (\varphi \zeta_i) dx \\
&= \sum_{i=0}^N \int_{G_i} |\nabla u|^{p-2} \nabla u \cdot \nabla (\varphi \zeta_i) dx \\
&= \int_{G_0} |\nabla u|^{p-2} \nabla u \cdot \nabla (\varphi \zeta_0) dx + \sum_{i=1}^N \int_{G_i} |\nabla u|^{p-2} \nabla u \cdot \nabla (\varphi \zeta_i) dx \\
&= \int_{\Omega \setminus S} |\nabla u|^{p-2} \nabla u \cdot \nabla (\varphi \zeta_0) dx + \sum_{i=1}^N \int_{G_i} |\nabla u|^{p-2} \nabla u \cdot \nabla (\varphi \zeta_i) dx \\
&= \sum_{i=0}^N \int_{G_i} f(x, u, \nabla u)(\varphi \zeta_i) dx \\
&= \sum_{i=0}^N \int_{\Omega} f(x, u, \nabla u)(\varphi \zeta_i) dx \\
&= \int_{\Omega} f(x, u, \nabla u) \varphi dx.
\end{aligned}$$

donde hemos usado el hecho de que $\varphi \zeta_i \in \mathcal{C}_0^\infty(G_i)$ y que $u|_{G_i}$ es solución débil de (2.1) en G_i para cada $1 \leq i \leq N$. Además, usamos la hipótesis de que u es solución débil de (2.1) en $\Omega \setminus S$ y que $\int_{G_0} |\nabla u|^{p-2} \nabla u \cdot \nabla (\varphi \zeta_0) dx = \int_{\Omega \setminus S} |\nabla u|^{p-2} \nabla u \cdot \nabla (\varphi \zeta_0) dx$ ya que φ se anula fuera de K . Así, hemos probado que u es solución débil de (2.1) en todo Ω . ■

Ahora si estamos en condiciones de probar el principal resultado de este trabajo.

Prueba del Teorema 4.1. Definamos los siguientes conjuntos abiertos $\Omega_1 = \Omega \setminus \{x \in \Omega : u(x) = 0\}$, $\Omega_2 = \Omega_1 \setminus \{x \in \Omega_1 : \nabla u(x) = 0\}$ y $\Omega_3 = \Omega \setminus \{x \in \Omega : \nabla u(x) = 0\}$. Entonces, por hipótesis, u es solución débil de (2.1) en Ω_1 . Veamos que u es solución débil de (2.1) en Ω_2 .

Sea $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega_2)$. Extendemos φ a una función $\tilde{\varphi} \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega_1)$ de manera que $\tilde{\varphi} = \varphi$ en Ω_2 y $\tilde{\varphi} = 0$ fuera de Ω_2 . Luego,

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega_2} |\nabla u|^{p-2} \nabla u \cdot \nabla \varphi dx &= \int_{\Omega_1 \setminus \{x \in \Omega_1 : \nabla u(x) = 0\}} A_p(\nabla u) \cdot \nabla \tilde{\varphi} dx \\
&= \int_{\Omega_1} A_p(\nabla u) \cdot \nabla \tilde{\varphi} dx \\
&= \int_{\Omega_1} f(x, u, \nabla u) \tilde{\varphi} dx \\
&= \int_{\Omega_1 \setminus \{x \in \Omega_1 : \nabla u(x) = 0\}} f(x, u, \nabla u) \tilde{\varphi} dx + \int_{\{x \in \Omega_1 : \nabla u(x) = 0\}} f(x, u, \nabla u) \tilde{\varphi} dx \\
&= \int_{\Omega_1 \setminus \{x \in \Omega_1 : \nabla u(x) = 0\}} f(x, u, \nabla u) \tilde{\varphi} dx \\
&= \int_{\Omega_2} f(x, u, \nabla u) \varphi dx.
\end{aligned}$$

donde hemos usado que u es solución débil de (2.1) en Ω_1 y la definición del operador $A_p(\eta) = |\eta|^{p-2} \eta$ en los puntos donde $\eta = 0$ cuando $1 < p \leq 2$.

Ahora bien, observemos que $\Omega_2 = \Omega_3 \setminus \{x \in \Omega : u(x) = 0\}$. Por lo tanto, hemos probado arriba que u es solución débil de (2.1) en $\Omega_3 \setminus \{x \in \Omega : u(x) = 0\}$ y, como $\nabla u \neq 0$ en Ω_3 por el Lema 4.2, u resulta ser solución débil de (2.1) en Ω_3 . Finalmente, por la Proposición 4.1, u es solución débil de (2.1) en todo Ω .

■.

Bibliografía

- [1] Bogнар G., *Numerical and analytic investigation of some nonlinear problems in fluid mechanics*, Computer and Simulation in Modern Science, **2**, (2008).
- [2] Brezis, H. *Analyse Fonctionnelle. Théorie et applications* (2e tirage), Université Pierre et Marie Curie et École Polytechnique, París, (1983).
- [3] Crandall M., Ishii H. and Lions P-L., *User's guide to viscosity solutions of second order partial differential equations*, Bull. Amer. Math. Soc., **27** 1 (1992), 1-67.
- [4] Evans L.C., Gariepy R.F., *Measure theory and fine properties of functions*, Studies in Advanced Mathematics, CRC Press, Boca Raton, FL (1992).
- [5] Evans L. C., *Partial Differential Equations*, American Mathematical Society, **19**, (2010).
- [6] DiBenedetto E., $C^{1+\alpha}$ -local regularity of weak solutions of degenerate elliptic equations, Nonlinear Anal. **7** (1983), 827-850.
- [7] Heinonen J., Kilpeläinen T., and Martio O., *Non-linear potential theory of degenerate elliptic equations*, Dover Publications, Inc., Mineola, NY, (2006).
- [8] Jost J., *Partial Differential Equations* (2da Edición), Department of Mathematics, San Francisco State University, (2007).
- [9] Julin V., Juutinen P., *A new proof for the equivalence of weak and viscosity solutions for the p -Laplace equation*, Communications in PDE **37** 5 (2012), 934-946.
- [10] Juutinen P. and Lindqvist P., *A theorem of Radó's type for the solutions of a quasilinear equation*, Mathematical Research Letters, **11** (2002), 31-34.
- [11] Juutinen P. and Lindqvist P., *Removability of a level set for solutions of quasilinear equations*, Communications in PDE, **30** 3 (2005), 305-321.
- [12] Juutinen P., Lindqvist P., and Manfredi J., *On the equivalence of viscosity solutions and weak solutions for a quasilinear equation*, SIAM J. Math. Anal., **33** 3 (2001), 699-717.
- [13] Kilpeläinen T., *A Radó type theorem for p -harmonic functions in the plane*, Electronic Journal of Differential Equations, **1994** (1994), No. 09, 1-4.

- [14] Král J., *Some extension results concerning harmonic functions*, J. London Math. Soc, (2) **28** (1983), 62-70.
- [15] Martio O., *Counterexamples for unique continuation*, Manuscripta Math, **60** (1988), 21-47.
- [16] Medina M., Ochoa P., *On viscosity and weak solutions for non-homogeneous p -Laplace equations*, To appear in Advances in Nonlinear Analysis, <https://arxiv.org/abs/1610.09216>.
- [17] Radó T., *Über eine nicht fortsetzbare Riemansche Mannigfaltigkeit*, Math. Z, **20** (1924), 1-6.
- [18] Takimoto K., *Radó type removability result for fully non-linear equations*, Differential and Integral Equations, **20** 8 (2007), 939-960.